“*Lo vedo, ma non ci credo...*”, seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor [1]

Arrigo G., D’Amore B. (2002). “Lo vedo ma non ci credo…”, seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-57.

Gianfranco Arrigo [2] – Bruno D’Amore [3]
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica (N.R.D.)
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia

Summary. *In this article we study the epistemological and didactic obstacles encountered by Italian and Swiss students (aged 17-19) in understanding Cantor's theorem that there is a larger infinity of real numbers between 0 and 1 than the infinity of natural or rational numbers. This is followed by another analogous study of another theorem of Cantor. This therefore constitutes a preliminary look at understanding the difficulty encountered by students arising from topics involving mathematical infinity. Particular attention is paid to didactic obstacles, created at the start by the same teachers in previous years, of intuitive models that then become transformed into misconceptions that sometimes become insuperable.*

1. Nota introduttiva

[1] Lavoro eseguito nell’àmbito del Programma di Ricerca dell’Unità di Bologna: «*Ricerche sul funzionamento del sistema: allievo-insegnante-sapere: motivazioni della mancata devoluzione*», inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: «*Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*», cofinanziato con fondi MIUR.
[2] Dipartimento dell’Educazione del Canton Ticino, Bellinzona, Svizzera. (gianfranco.arrigo@span.ch)
[3] Dipartimento di Matematica dell’Università di Bologna. Facoltà di Scienza della Formazione primaria dell’Università di Bolzano. (damore@dm.unibo.it)

In un nostro precedente lavoro (Arrigo, D'Amore, 1999) abbiamo messo in evidenza quali siano le enormi difficoltà che rendono non accettabile da parte della quasi totalità degli studenti dei due ultimi anni della scuola secondaria superiore (ossia ad allievi tra i 17 ed i 19 anni)[4] il celebre teorema di Georg Cantor secondo il quale, per dirla nella maniera più divulgata possibile, vi sono tanti punti in un quadrato quanti in un suo lato.[5]
Rinviando a quel lavoro per informazioni più complete e corrette, ci limitiamo qui alle seguenti note introduttive che, almeno in parte, riassumono i risultati di quel lavoro e spiegano come abbiamo avvertito la necessità di questo nuovo.
La maggior parte (circa il 60%) degli studenti osservati sembra non comprendere il senso stesso dell'affermazione che si vorrebbe dimostrare; il 5% di coloro che capiscono il senso, mostra di non comprendere la dimostrazione; quasi il 15% dichiara invece di averla compresa, ma con opportune interviste si scopre che si tratta più di fenomeni legati al contratto didattico che non una vera e propria comprensione; tra coloro che capiscono l'affermazione contenuta nella tesi, alcuni la trovano così paradossale da rifiutarla (circa il 6%); altri l'accettano per quel fenomeno che la letteratura ha ampiamente già evidenziato,[6] che noi abbiamo voluto chiamare "appiattimento" (Arrigo, D'Amore 1999, pagg. 469-470), e che si potrebbe riassumere con le seguenti parole, tratte dall'intervista di un allievo presa come prototipo: «Tanto sono tutti e due infiniti» [si intende: l'insieme dei punti di un quadrato e l'insieme dei punti di un suo lato]. Secondo questi studenti (circa il 3%), dunque, tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità, cioè tutti possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro.
La non comprensione del teorema di Cantor ci ha fatto riflettere se non fosse il caso di esaminare *come* lo studente sia disposto ad accogliere la dimostrazione che esistono diverse cardinalità infinite ed abbiamo

[4] In Italia, attualmente, la Scuola Media prevede un corso di 3 anni e la Superiore di 5; in Svizzera, la Scuola Media prevede un corso di 4 anni e la Superiore di 4. Dunque, di norma, le età degli studenti di 4ª e 5ª Superiore coincidono.
[5] Per informazioni storico-critiche su questo teorema e per una sua formulazione più aderente alla realtà storica, rinviamo ad Arrigo, D'Amore (1999).
[6] La bibliografia specifica su questo interessante tema è sempre in Arrigo-D'Amore (1999) con richiami alle pagg. 469-470.

pensato di ripercorrere le stesse “tappe” del lavoro precedente, ma mettendo al centro dell’indagine alcuni risultati raggiunti da Georg Cantor, concernenti la cardinalità di insiemi numerici; più precisamente sono state proposte agli studenti le dimostrazioni delle seguenti affermazioni:

- Vi sono tanti multipli di 997 quanti sono i numeri naturali;
- Vi sono tanti numeri quadrati quanti sono i numeri naturali;
- Vi sono tanti numeri interi positivi, quanti sono i negativi, quanti sono gli interi nella loro totalità;
- Vi sono tanti numeri razionali quanti sono i numeri naturali;
- La potenza dell’insieme **R** dei numeri reali (addirittura del solo intervallo reale]0,1[ ) è maggiore di quella di **N** (e quindi anche di quella dell’insieme dei numeri razionali **Q**);
- Un segmento lungo 2 cm ha lo stesso numero di punti di una retta.

La non comprensione del teorema oggetto dello studio precedente è strettamente legata al problema del modello intuitivo (Fischbein, 1985) che gli studenti hanno degli enti geometrici ed in particolare del punto; tale modello intuitivo è il risultato di un insegnamento radicato nella scuola di base (elementare e media) di entrambi i nostri Paesi e costituisce un fortissimo ed apparentemente ineliminabile ostacolo didattico. [Ineliminabile, a meno che non si intervenga a monte, e cioè sulla preparazione in questo specifico campo, degli insegnanti delle scuole di base].
Prima di procedere, vogliamo notare come, nell’articolo precedente, la ricerca di ostacoli epistemologici, peraltro già ampiamente evidenziati nella letteratura internazionale, si sia rivelata invece solo parziale; di fatto, abbiamo dovuto constatare che vi sono una quantità di fortissimi ostacoli di natura didattica che si frappongono tra il teorema di Cantor e la sua comprensione/accettazione da parte degli studenti. Dunque, in questo nuovo lavoro, abbiamo sùbito messo in campo sia la ricerca di ostacoli epistemologici, sia di quelli didattici.

2. Cenni storici sull’evoluzione del concetto matematico di infinito e note critiche

I contenuti matematici il cui apprendimento costituisce l'oggetto della nostra nuova ricerca, hanno costituito per oltre due millenni un difficile ed affascinante terreno di indagine sul quale si sono impegnati e a volte scontrati molti pensatori, dai filosofi greci fino a Cantor e Dedekind. La posizione di Aristotele, che mise una sorta di veto intellettuale a considerazioni che si riferissero all'infinito attuale, cioè alla trattazione di un qualsiasi insieme avente infiniti elementi come dato, appunto, nella sua infinità, sopravvisse fino al XIX secolo. Rileviamo però che già nel Medioevo si possono ritrovare testimonianze dell'insensatezza di rifiutare aprioristicamente l'infinito attuale. Per esempio, il «dottor sottile» Giovanni Duns Scoto (1266-1308), nel tentativo di dimostrare che le curve geometriche non si possono considerare composte di punti infinitesimi, usa questo concetto. Egli pensa a due circonferenze qualsiasi (ad esempio, una minuscola ed una gigantesca) e conclude che, se le curve avessero punti infinitesimi, esse dovrebbero avere lo stesso numero di punti: *lo si vede muovendole dapprima in modo da far sovrapporre i loro centri, e poi mettendo in corrispondenza i punti che stanno sugli stessi raggi.* Sullo stesso tema interviene anche Galileo Galilei (1564-1642), nella Prima Giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche.* Egli sostenne che *«punti aventi le stesse dimensioni e in ugual numero possono costituire circonferenze minori della luce dell'occhio di una pulce, o maggiori dell'equinoziale del primo mobile».* Nel 1851, Bernhard Bolzano (1781-1848) e nel 1878 Georg Cantor (1845-1918) ammisero la possibilità di mettere in corrispondenza biunivoca due insiemi come una *definizione* del fatto che essi abbiano lo stesso numero di elementi. L'argomento di Scoto diventa allora la dimostrazione del teorema che, effettivamente, *due circonferenze qualsiasi hanno lo stesso numero di punti.* Nello stesso ordine di idee si colloca la domanda posta ai nostri studenti sul numero di punti contenuti in un segmento lungo 2 cm e in una retta intera.
L'opera di Cantor sulla teoria degli insiemi (in particolare sugli insiemi infiniti) rappresenta una svolta decisiva nella speculazione attorno al concetto di infinito. Essa ebbe un effetto dirompente nella storia del pensiero matematico e fu attaccata pesantemente da eminenti personalità, come per esempio Leopold Kronecker. Fortunatamente Cantor ebbe anche amici e confidenti che lo stimavano. Il suo interlocutore di fiducia fu Richard Dedekind (1831-1916) e fu appunto a questi che Cantor rivolse la famosa frase che ha dato il titolo generale

al nostro lavoro: *«lo vedo ma non ci credo»*, a proposito del teorema trattato nella prima parte della ricerca, teorema che Cantor aveva dimostrato in modo inequivocabile, ma la cui affermazione risulta contraria alla percezione della nostra intuizione. Il teorema (nella sua forma più semplice) afferma che vi sono tanti punti nella superficie di un quadrato quanti ve ne sono in un suo lato. Dedekind adottò per la prima volta (1888) la definizione di insieme infinito come insieme che si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. La definizione fu poi usata da Cantor, a tal punto che oggi più di un Autore gliela attribuisce. Giova ricordare che, tre anni prima, C. S. Peirce aveva definito un insieme finito come l'insieme che non poteva porsi in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. Volendo risalire nel tempo, tracce anticipatrici di questo concetto si trovano per esempio in Plutarco, Proclo, Adamo di Balsham, Galileo Galilei, Bernhard Bolzano.
I risultati più eclatanti ottenuti da Cantor si riferiscono agli insiemi infiniti di numeri. Dopo aver deciso di chiamare *numerabile* un insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme **N** dei numeri naturali (quindi che ha lo stesso numero di elementi di **N** o ancora che ha la stessa *potenza* di **N**) Cantor esamina i diversi insiemi numerici dal punto di vista della loro potenza. Il primo risultato clamoroso è la dimostrazione che anche l'insieme **Q** dei numeri razionali è numerabile. Cantor la esegue ordinando le frazioni in modo opportuno e scegliendo un "percorso" che tocca una dopo l'altra tutte le frazioni esistenti. L'insieme di tutte le frazioni (e dunque dei razionali) risulta quindi numerabile. A maggior ragione, l'insieme di numeri razionali (in cui elementi nell'insieme delle frazioni compaiono più di una volta) è pure esso in corrispondenza biunivoca con **N**, in altre parole è numerabile. Questa dimostrazione, geniale nella sua semplicità, è stata da noi proposta agli studenti, praticamente nella stessa forma data da Cantor.
Ancora più sorprendente, e genialmente semplice, è la dimostrazione di Cantor (1874) del fatto che anche l'insieme dei *numeri algebrici*, cioè l'insieme di tutti i numeri che sono soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti interi, è numerabile (a maggior ragione lo è allora l'insieme **Q** che risulta essere un sottoinsieme proprio dell'insieme dei numeri algebrici).

Ancora nello stesso anno, Cantor dà la prima dimostrazione del fatto che l'insieme dei numeri reali *non* è numerabile. Ai nostri studenti abbiamo presentato la seconda dimostrazione data da Cantor, quella che si basa sulla forma decimale e che è decisamente più intuitiva. In questa dimostrazione, Cantor usa per la prima volta un procedimento, chiamato in seguito anche "metodo della diagonale". Si tratta di una dimostrazione per assurdo. Ammettendo per assurdo di avere posto in corrispondenza biunivoca tutti i numeri reali dell'intervallo]0,1[con l'insieme **N** (quindi di aver numerato *tutti* i numeri reali dell'intervallo]0,1[), Cantor mostra che si può allora costruire un nuovo numero reale compreso tra 0 ed 1 e che purtuttavia è diverso dai precedenti. L'insieme **R** dei numeri reali ha quindi una potenza superiore a quella degli insiemi numerabili: questa nuova potenza viene anche chiamata *continuo*.
Il risultato ha il sapore di una rivoluzione nella filosofia della matematica e scandalizza pensatori come il già citato Kronecker che considerava le conquiste di Cantor come pericolose opere di una mente malsana.
La conseguenza del citato teorema è la seguente: siccome l'insieme dei numeri reali è più che numerabile e il suo sottoinsieme dei numeri algebrici è per contro "solo" numerabile, l'insieme dei numeri reali non algebrici (i *trascendenti*) deve avere pure esso una potenza maggiore del numerabile. Fu allora che nacque nella mente di Cantor la cosiddetta "ipotesi del continuo", la congettura secondo la quale non esiste una potenza intermedia compresa tra quella di **N** e quella di **R**. L'ipotesi è rimasta tale anche ai giorni nostri. Il contributo di Kurt Gödel (1906-1978) in questo àmbito servì per dimostrare che l'ipotesi del continuo è almeno compatibile con alcuni assiomi ampiamente accettati della teoria degli insiemi.[7]

Con gli studenti soggetti delle prove che qui descriveremo non ci siamo spinti fino alle vette del pensiero cantoriano. Ci siamo limitati alle due questioni basilari della numerabilità dell'insieme dei numeri razionali **Q** e della non numerabilità dell'insieme dei numeri reali **R**. La scelta non deve essere considerata di comodo, anche se per certi versi potrebbe esserlo, ma siamo convinti che i due teoremi, oltre che essere

[7] Sul tema dell'ipotesi del continuo, si veda Cohen, 1966.

alla base della teoria sopra citata, racchiudono anche tutti gli ostacoli epistemologici che rendono ardua la comprensione dell'intera problematica.

3. Descrizione del quadro teorico di riferimento

La complessità dell'apprendimento dell'infinito è ampiamente dimostrata e documentata, nel contesto internazionale, da una letteratura vastissima, testimoniata per esempio in D'Amore (1996, 1997): il primo lavoro analizza per "categorie" le ricerche stesse, il secondo presenta una bibliografia piuttosto vasta.
Per non ripetere qui le considerazioni già ivi fatte ed il quadro teorico di Arrigo, D'Amore (1999) che copre ampiamente anche il presente lavoro, ci limitiamo a ricordare solo quei testi che costituiscono stretto riferimento nell'attuale ricerca.
Trattando di corrispondenza biunivoca tra enti geometrici, ed in particolare tra segmenti, resta basilare il classico lavoro di Tall (1980) che evidenziava il fenomeno che noi abbiamo chiamato *dipendenza* in base al quale vi sono più punti in un segmento lungo (al limite, in una retta), rispetto ad uno più corto.
In questo lavoro, come si vedrà, la dimostrazione (per assurdo) di fatti legati alle cardinalità viene basata sui modi di scrivere numeri, cioè sulle forme di scrittura dei numeri reali. Ciò fa scattare la problematica dello *scivolamento*, evidenziata in una certa prospettiva (maggiormente linguistica) da Duval (1995) e da noi estesa in Arrigo, D'Amore (1999), secondo cui lo studente accetta a fatica o non accetta addirittura una dimostrazione nella quale si passa da un oggetto di discorso ad un altro; per esempio, si sta parlando di fatti geometrici e si passa invece a considerazioni aritmetiche (come nel caso della dimostrazione oggetto del nostro lavoro del 1999), oppure si sta parlando di elenchi di numeri in una successione e si passa invece a considerazioni sulle modalità di scrivere i numeri stessi (come avverrà nel caso presente).
Questo lavoro tende a far luce in modo particolare sul fenomeno dell'*appiattimento*, nome che abbiamo voluto dare a quanto già evidenziato nei classici lavori di vari Autori, tra i quali segnaliamo Waldegg (1993) e alcuni altri contributi della scuola di Tel Aviv, con particolare riferimento a Efraim Fischbein ed ai suoi allievi. Si tratta

del fenomeno, già ricordato poco sopra, in base al quale lo studente che, su spinta del docente o del ricercatore, accetta che alcuni insiemi infiniti siano tra loro equipotenti (come N e Z), lo fa perché pensa che ciò sia legato all'infinità e che dunque, come generalizzazione, tutti gli insiemi infiniti lo siano. Questa misconcezione è il risultato di un positivo passaggio da una prima concezione nella quale (per dirla con parole prese a prototipo da uno studente) «In Z c'è il doppio degli elementi di N, è ovvio», ad una seconda concezione nella quale, dopo aver accettato la dimostrazione che N è invece equipotente a Z, «Tutti gli insiemi infiniti sono equipotenti tra loro, dato che sono infiniti». La seconda misconcezione è, in un certo senso, un "miglioramento" rispetto alla precedente, una "scalata" lenta e graduale verso la costruzione di un concetto finale corretto, che potremmo chiamare "modello di infinito".
Dipendenza e *appiattimento* sono fenomeni a fatica distinguibili, a nostro avviso, come due facce di una stessa medaglia. Ciò non solo in questo lavoro nel quale:

- *dipendenza*: ci sono da confrontare l'intervallo aperto]0, 1[in R e tutto Q_a (i razionali assoluti, 0 compreso); è ovvio che, come immagine visiva, appare che il primo "segmento" sembra essere incluso nel secondo
- *appiattimento*: i due insiemi da confrontare sono entrambi infiniti.

Come mostreremo più avanti, nel corso del paragrafo 8, si possono pensare come due aspetti di uno stesso *errore* che consiste nel tentativo di *applicare ad insiemi infiniti procedure proprie di quelli finiti*, tentativo già evidenziato in letteratura (Shama, Movshovitz Hadar, 1994) ma da noi qui rilevato in modo netto, soprattutto nelle discussioni e nelle interviste. Ci pare opportuno anticipare qui una conclusione che vedremo, e cioè che diventa modello intuitivo del concetto di equipotenza quel che (davvero) è nel campo finito e che, pur potendosi e dovendosi estendere nell'infinito, provoca però traumi cognitivi. Se "infinito" è un numero naturale, e se vi sono diversi insiemi con tale cardinalità, allora tutti devono poter essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro. L'origine di tale misconcezione (che pure ha certo caratteristiche di ostacolo epistemologico, ben messe in evidenza dalla storia della matematica e da moltissime ricerche) è di natura prevalentemente didattica; l'allievo, mediante conteggi e mediante corrispondenze biunivoche, si appropria con sicurezza di tali

concetti e li fa propri. D'altra parte, l'ostacolo non è di per sé il segnale di un errore; l'ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad una situazione nuova. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo successo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.
Questa osservazione ed i risultati dell'attuale ricerca ci spingono a prendere in esame la possibilità-necessità di rivedere i contenuti a carattere disciplinare da proporre nel corso della formazione iniziale degli insegnanti, anche di scuola primaria; non tanto perché modifichino i contenuti della loro azione didattica, quanto perché evitino il formarsi di quei modelli intuitivi che produrranno poi situazioni di disagio cognitivo.

Ma torniamo al quadro teorico.
Tutte le precedenti considerazioni chiamano in causa altri due fenomeni interessanti:

- la difficoltà che sembra avere lo studente a trattare con l'infinito attuale, piuttosto che con quello potenziale, già rilevata in molteplici lavori, e che solo marginalmente tocca questo nostro [per cui rimandiamo il quadro teorico contenuto in Arrigo, D'Amore (1999)]; tuttavia segnaliamo Tsamir (2000) nel quale si evidenzia come questo tipo di difficoltà non si incontra solo tra studenti, ma anche tra insegnanti (in formazione), il che rafforza la necessità di prendere in futuro sempre più in esame gli ostacoli didattici e i contenuti disciplinari della formazione;
- la difficoltà che incontra lo studente per rendersi conto della contraddizione tra due affermazioni, quando vi cade; si aggiunga la quasi totale indifferenza che talvolta lo studente dimostra, anche quando si dà conto di essere in contraddizione; anche su questo punto ricordiamo due classici (Stavy, Berkovitz, 1980; Hart, 1981), rimandando al nostro lavoro precedente per una bibliografia più ampia.

4. Descrizione dei problemi

Descriviamo in questo paragrafo in modo esplicito i problemi che ci hanno spinto a questa ulteriore ricerca.

P1. Seguendo un percorso didattico opportuno, è possibile far sì che gli studenti di penultimo ed ultimo anno delle superiori arrivino a comprendere il senso delle affermazioni poste a tesi dei teoremi oggetto di questo lavoro?

P2. In caso negativo, perché no? Quali sono i motivi? Gli ostacoli epistemologici sono evidenti, la storia della matematica stessa ce li illustra; ma vi sono ostacoli didattici?

P3. In caso positivo, che ne sarà dell'*appiattimento*? Cioè: se quegli studenti che inizialmente sono caduti nell'appiattimento (per esempio tra N e Z) durante il percorso didattico comprenderanno il teorema che stabilisce la non numerabilità di **R**, come reagiranno alla evidenziazione della contraddizione?

P4. Nel caso di una dichiarata comprensione delle affermazioni e delle dimostrazioni in oggetto, fino a che punto questi apprendimenti sono radicati nella mente dello studente? In altre parole: "ci crede perché lo vede oppure ci crede perché ne è profondamente convinto?"

5. Ipotesi della ricerca

Nel formulare le ipotesi attese, è stata di grande aiuto la ricerca precedente che ci aveva aiutato ad immaginare scenari piuttosto vicini, come sceneggiatura, a quello di questo nuovo lavoro. Per esempio, come diremo meglio in **6.**, era divenuto per noi chiaro che è assolutamente necessario fare ricorso a colloqui ed interviste con i soggetti testati, dato che le risposte scritte a test da sole non rivelano veramente motivazioni, clausole del contratto didattico, intuizioni etc. (ved. il punto P4 del paragrafo precedente). Nel formulare le seguenti ipotesi, dunque, abbiamo tenuto conto del fatto che avremmo avuto la possibilità di entrare in sintonìa con gli studenti, dopo il percorso didattico e dopo la risposta ai test (come diremo meglio in **6.**) discutendo con loro sui vari punti.

I1. Vista l'esperienza precedente, anche se le dimostrazioni dei nuovi teoremi in esame appaiono, agli occhi di matematici esperti, come molto elementari, ipotizzavamo che sarebbero stati pochi gli studenti in grado di comprenderle davvero. Ciò va meglio chiarito. Per ogni teorema bisogna distinguere tra:

- il significato della tesi
- la dimostrazione di essa.

Era nostra convinzione che alcuni studenti si sarebbero lì per lì illusi di comprendere la dimostrazione e la tesi ma, una volta posti di fronte, oralmente, alla natura vera del senso della tesi, avrebbero mostrato più d'una incertezza e forse un rifiuto. A quel punto, la "facile" dimostrazione avrebbe... vacillato. È ben noto, dalla letteratura ed anche dal nostro lavoro precedente, che molti studenti ritengano che le "dimostrazioni" che portano a risultati paradossali siano null'altro che dei "trucchi" dei quali gli insegnanti (in questo caso i ricercatori) sono i depositari. È ben evidenziato dalla letteratura che una delle clausole del contratto didattico agisce proprio nel far accettare tesi di teoremi per fiducia nell'insegnante come rappresentante dell'istituzione e come depositario del Sapere. Tale accettazione viene troppo spesso confusa con la costruzione di una conoscenza; di fatto tale apparente apprendimento (che si rivela nel test scritto) si affievolisce col tempo e si... scioglie alle prime obiezioni (come vedremo chiaramente nei risultati dei colloqui).
Ritenevamo molto interessante esaminare le riserve degli studenti e le modalità della loro espressione.

I2. In caso di non accettazione delle tesi dei teoremi, ipotizzavamo che, a parte gli ovvii ostacoli epistemologici, avremmo potuto mettere in evidenza ostacoli di natura didattica. Uno, che eravamo sicuri di incontrare, riguarda la natura della densità e della continuità, piuttosto confuse nella mente non solo degli studenti del penultimo anno, che ancora non sono entrati in contatto con l'Analisi, ma pure negli studenti dell'ultimo, nonostante essi abbiano già studiato R, la continuità etc., ma non hanno certo sempre *costruito* tale concetto in modo corretto. Questa considerazione, così formulata, è troppo banale; la vera domanda è: *quali* ostacoli didattici vi sono alla comprensione delle tesi dei teoremi che stiamo esaminando? La nostra attenzione si è puntata, negli ultimi anni, sul "modello della collana" che viene esplicitamente indicato come modellizzazione per rappresentarsi mentalmente i punti sulla retta fin dalla Scuola Elementare e che resiste ad ogni attacco successivamente. Per esempio, quando si pongono i cosiddetti numeri frazionari sulla "retta razionale" r_Q, il modello-collana resiste e la densità resta fatto potenziale e non naturale. A molti studenti la densità appare già come... riempitiva della retta e dunque non capiscono che differenza vi sia tra r_Q ed r. Né li aiuta molto, pochi anni dopo, lo studio di **R** e la definizione di continuità... La nostra ipotesi, dunque, in sostanza, era che avremmo ritrovato ostacoli didattici tipici di modelli del tutto elementari.

I3. La risposta al terzo problema ci sembrava la più interessante. Eravamo convinti che, durante un percorso didattico opportunamente predisposto, gli studenti (classificati dai loro insegnanti come "bravi") avrebbero accettato che, contrariamente all'intuizione, **N** e **Z** sono tra loro equipotenti, e qui pensavamo che più d'uno studente (oralmente) avrebbe fatto riferimento all'appiattimento. Al momento in cui il nuovo teorema avrebbe mostrato che, viceversa, esistono insiemi infiniti tra loro non equipotenti, avremmo potuto apprezzare la reazione degli studenti più motivati di fronte ad una situazione di contraddizione esplicita. A quel punto ipotizzavamo di incontrare tutte le reazioni già segnalate, in modo più o meno generico, nella letteratura: indifferenza alla contraddizione, interesse a risoverla, definitiva non accettazione del teorema, rimessa in discussione di tutto l'apparato e dello stesso percorso didattico che, invece, era stato in precedenza accettato.

I4. Già nel corso dell'esame dei risultati del questionario relativo alla ricerca precedente avevamo avuto parecchie perplessità sulle ragioni reali che hanno spinto gli studenti a rispondere in un certo modo. In sostanza, le nostre obiezioni concernono l'affidabilità dei risultati del test individuale. Esso ci mostra indubbiamente che cosa risponde lo studente, ma non ci dice nulla sul *perché* risponda così. Ci sembra marcata la fiducia (quasi cieca in matematica, soprattutto negli studenti svizzeri) che lo studente ripone in ciò che l'insegnante espone: in questi casi per lo studente la risposta è corretta perché "lo ha detto il prof", "perché sta scritto sul manuale" etc.). Inoltre, spingendo al limite la

riflessione, si potrebbe addirittura ipotizzare che certe risposte corrette siano dettate da misconcezioni (per esempio **N** e **Q** sono equipotenti perché entrambi infiniti; **R** ha più elementi di **N** perché **N** è un suo sottoinsieme proprio). Da ultimo, siamo anche interessati al grado di convinzione che lo studente mostra di avere nei confronti di ciò che ha appreso. La particolare problematica relativa agli insiemi infiniti, non permette più all'allievo di verificare con i propri sensi la credibilità di ciò che sta apprendendo quindi, nel migliore dei casi, lo studente deve modificare le proprie immagini mentali e trasformarle in modelli cognitivi. Ma questo processo, in realtà, avviene per tutti gli studenti che danno una risposta corretta nel test? Se no, in quale misura?
Per far fronte a questa delicata problematica, abbiamo pensato di effettuare colloqui individuali mirati a stabilire sia le vere motivazioni che stanno dietro le risposte degli studenti, sia il grado di convincimento che lo studente mostra di avere nei confronti delle affermazioni che dichiara di aver appreso.

6. Metodologia della ricerca

Con tutti gli studenti si è sviluppato un percorso didattico che è stato affidato a ciascuno come fatto privato. Ad ogni studente, cioè, è stato consegnato un plico che, partendo dall'idea di "conteggio" di un numero finito di enti, terminasse con l'enunciazione e la dimostrazione del teorema secondo il quale vi sono più elementi in]0, 1[($\subset$ R) che non in N. [Questo percorso didattico è riportato nell'Appendice 1].
Facciamo notare qui che il testo oggetto dello studio individuale è stato all'unisono riconosciuto come "facile", "comprensibile" (e simili) dagli studenti sottoposti a prova; esso era stato redatto dagli autori di questo articolo e sottoposto ad insegnanti dei due ultimi anni della scuola superiore per verificarne la leggibilità e la comprensibilità da parte di allievi di quel livello scolastico. Gli insegnanti scelti per la lettura critica non erano in nessun caso quelli stessi presso i quali si sarebbe poi dovuta svolgere la prova.
Lo studio del plico costituente il percorso poteva avvenire in aula, alla presenza di un docente che gentilmente ci aveva messo a disposizione la classe; o alla presenza di uno dei due autori di questo articolo. Durante la fase di studio non era vietato che gli studenti si

scambiassero l'un l'altro impressioni ed opinioni, allo scopo che l'opinione personale maturata dallo studio fosse rafforzata da una discussione e quindi non fosse il mero risultato di un malinteso: costringere uno studente ad esporre un proprio convincimento ed a difenderlo è il modo migliore per far sì che lo stesso si costruisca un'idea personale che non sia solo il frutto di contratti o di misconcetti.
Alla fine dello studio personale, allo studente era affidato un questionario [che riportiamo per intero nell'Appendice 2], al quale doveva rispondere, questa volta con l'obbligo di lavorare da solo e di dare quindi risposte personali. Da parte nostra era stato ampiamente chiarito che si trattava di un lavoro di ricerca, che non era a carattere valutativo, che i nomi richiesti sul test potevano essere di fantasia. Possiamo dichiarare con assoluta certezza che la maturità degli studenti è stata di grande aiuto in questa fase. Per questo vogliamo ringraziarli.
Sono stati sottoposti allo studio e poi al test:
173 allievi del penultimo anno, dei quali 90 svizzeri ed 83 italiani
16 allievi italiani dell'ultimo anno
per un totale dunque di 189 allievi.
Di tali 189 allievi, ne sono stati intervistati 68 (36 svizzeri e 32 italiani). Le interviste degli studenti svizzeri sono state fatte da G. Arrigo; le interviste degli studenti italiani sono state fatte da B. D'Amore; in ciascun caso era inoltre presente un altro ricercatore che prendeva appunti e, in alcuni casi, registrava.
Le interviste rivestono un'importanza fondamentale nella nostra ricerca, dato che permettono di ripercorrere le risposte date nei test dai singoli allievi, sia allo scopo di saggiarne il senso reale, sia allo scopo di verificarne la stabilità, sia allo scopo di rilevare le contraddizioni (di cui sopra) per valutare l'atteggiamento dello studente e la sua reazione.
Delle interviste non diamo la documentazione completa, sebbene, nei prossimi paragrafi, ci serviremo di frasi paradigmatiche enunciate da studenti. Gli appunti di tali interviste e le registrazioni effettuate sono a disposizione di chi volesse approfondire la tematica di ricerca.

7. Risultati del test e dell'intervista

7.1 Risultati degli studenti svizzeri (CH), italiani (I) e totali (T)

1a) In che misura sei d'accordo col criterio del percorso?

	per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
CH	0.00%	4.44%	27.78%	67.78%
I	1.01%	2.02%	33.33%	62.63%
T	**0.53%**	**3.17%**	**30.69%**	**65.08%**

1b) Sei sicuro che scegliendo percorsi diversi si ottenga lo stesso risultato?

	per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
CH	0.00%	0.00%	10.00%	88.89%
I	2.02%	1.01%	9.09%	85.86%
T	**1.06%**	**0.53%**	**9.52%**	**87.30%**

2a) In che misura sei d'accordo che si possa indifferentemente partire da 0 o da 1?

	per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
CH	11.11%	16.67%	30.00%	41.11%
I	8.08%	20.20%	24.24%	45.45%
T	**9.52%**	**18.52%**	**26.98%**	**43.39%**

2b) In che misura sei convinto che vi sono tanti multipli di 997 quanti sono i numeri naturali?

	per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
CH	11.11%	11.11%	16.67%	60.00%
I	5.05%	8.08%	14.14%	68.69%
T	**7.94%**	**9.52%**	**15.34%**	**64.55%**

2c) Secondo te vi sono più numeri naturali o più numeri naturali quadrati?

	esistono più numeri naturali	esistono più naturali quadrati	ve ne sono lo stesso numero	non si può dire
CH	11.11%	0.00%	82.22%	6.67%
I	8.08%	2.02%	76.77%	11.11%
T	**9.52%**	**1.06%**	**79.37%**	**8.99%**

2d) Qualcuno sostiene che i numeri relativi sono il doppio dei naturali. Che cosa ne pensi?

	che costui non ha capito nulla	che costui ha ragione	che costui potrebbe anche aver ragione
CH	40.00%	26.67%	27.78%
I	60.61%	13.13%	26.26%
T	**50.79%**	**19.58%**	**26.98%**

3) Malgrado che fra due razionali diversi ve ne siano addirittura infiniti, credi ancora che vi siano tanti razionali quanti naturali?

	se sì				**se no**	
	perché lo ha detto l'insegnante giustifican-dolo con una dimostrazio-ne che però non mi ha convinto	perché sono tutti e due infiniti	perché è contraria al buon senso	perché abbiamo visto una dimostra-zione chiarissi-ma e convincen-te	perché nella dimostra-zione c'è qualcosa che non mi convince	perché l'insieme dei razionali è più grande di quello dei naturali
CH	1.11%	30.00%	0.00%	27.78%	1.11%	38.89%
				58.89%		40.00%
I	1.01%	66.67%	3.03%	11.11%	2.02%	13.13%
				81.82%		15.15%
T	**1.06%**	**49.21%**	**1.59%**	**19.05%**	**1.59%**	**25.40%**
				70.90%		**26.98%**

4a) Vi sono più numeri reali tra 0 e 1 oppure più numeri razionali tra 0 e 1?

	tra 0 e 1 vi sono più razionali	tra 0 e 1 vi sono più reali	i due insiemi hanno la stessa cardinalità	non si può dire
CH	3.33%	75.56%	13.33%	7.78%
I	9.09%	44.44%	35.35%	9.09%
T	**6.35%**	**59.26%**	**24.87%**	**8.47%**

4b) Vi sono più numeri reali tra 0 e 1 oppure più numeri razionali in tutto l'insieme Q?

	più numeri razionali in Q	più numeri reali tra 0 e 1	i due insiemi hanno la stessa cardinalità	non si può dire
CH	5.56%	48.89%	24.44%	21.11%
I	15.15%	22.22%	38.38%	18.18%
T	**10.58%**	**34.92%**	**31.75%**	**19.58%**

4c) Vi sono più numeri reali in R oppure più numeri razionali in Q?

	più numeri razionali in Q	più numeri reali in R	i due insiemi hanno la stessa cardinalità	non si può dire
CH	1.11%	70.00%	16.67%	12.22%
I	3.03%	39.39%	41.41%	13.13%
T	**2.12%**	**53.97%**	**29.63%**	**12.70%**

4d) Vi sono più punti in un segmento lungo 2 cm o in una retta?

	vi sono più punti nel segmento	vi sono più punti sulla retta	i due insiemi hanno la stessa cardinalità	non si può dire
CH	1.11%	27.78%	51.11%	20.00%
I	1.01%	26.26%	52.53%	16.16%
T	**1.06%**	**26.98%**	**51.85%**	**17.99%**

8. Descrizione dei risultati presentati in 7. e verifica delle ipotesi formulate in 5.

Le domande 1a e 1b avevano lo scopo di sondare in che misura gli studenti accettavano la metodologia proposta attraverso il materiale di studio, consistente nel fondare la riflessione teorica sull'attività del contare gli elementi di un insieme. Dai risultati sembrerebbe che gli studenti siano largamente padroni di questo modo di procedere, il che ci tranquillizza perché cancella un primo possibile ostacolo all'apprendimento di quanto segue. Gli studenti svizzeri si dichiarano un po' più a loro agio rispetto a questa scelta, ciò che anticipa un loro atteggiamento (che risulterà ancor più evidente in seguito) di maggior fiducia verso ciò che viene proposto a scuola.

La domanda 2a pone qualche problema in più. Considerare o no lo zero nel contare i numeri naturali fa sicuramente differenza nel caso di sottoinsiemi finiti di N, ma quando si vogliono "contare" insiemi infiniti, questa "differenza" scompare. Il 10% circa della totalità degli studenti si dichiara per nulla d'accordo con questa affermazione e circa il 20% è perplesso ("mica tanto d'accordo"). Inizia qui la corsa verso i teoremi di Cantor, sul terreno dell'infinito attuale: è quindi scontato che vi siano le prime incomprensioni. Queste percentuali, pur essendo significative, risultano però sufficientemente basse, in modo da non influire troppo sul seguito della nostra valutazione.

La domanda 2b pone di fronte a un primo grande problema lo studente: questi, da una parte -seguendo il testo di studio- riesce a capire che ogni multiplo di 997 (k·997) corrisponde univocamente al numero naturale k (ciò stabilisce un'inequivocabile corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei multipli di 997 e l'insieme N che fa dire che i due insiemi hanno lo stesso numero di elementi); d'altra parte lo studente "vede" che lungo la retta numerica vi sono tantissimi numeri naturali che non sono multipli di 997, ciò che gli impedisce di "credere" davvero al risultato teorico. Il problema che viene a galla proprio qui per la prima volta in questo lavoro è dovuto al fatto che lo studente, inconsciamente, tratta l'infinito attuale con le stesse procedure che ha sempre utilizzato per insiemi finiti (e che nel passato hanno avuto successo), ma che non si possono applicare direttamente ed acriticamente ad insiemi infiniti. Queste procedure, se applicate all'infinito attuale, assumono quindi il ruolo di misconcetti. Lo studente ne ricava la sensazione che la matematica sia una cosa completamente avulsa dalla realtà e che nelle ore di matematica si possano fare affermazioni anche chiaramente contrarie al senso comune, basta che seguano le regole del gioco matematico; gioco che potrà anche essere interessante, ma che non assume alcun interesse nell'attività di ricerca di spiegazione dei fatti reali. Questa fonte della disaffezione dei giovani per gli studi di matematica è peraltro già stata abbondantemente messa in luce da molta bibliografia.[8]

Le domande 2c e 2d sono analoghe alla 2a: cambia solo scenario. Ne risulta un impaccio maggiore, dovuto ad un'apparente "maggior evidenza" del senso comune.
I quadrati, per esempio, hanno tra loro distanze che aumentano sempre più: le differenze tra un quadrato e il suo precedente seguono la successione dei numeri, contrariamente al caso dei multipli di 997, nel quale le differenze tra un multiplo e il suo precedente è sempre costante; di conseguenza, la loro "densità" diminuisce pure costantemente. Ne risulta che, se lo studente si rende conto di ciò (il che è spesso accaduto, almeno durante le interviste ed i colloqui) è

[8] L'atteggiamento di studenti e docenti di fronte alla domanda: «Scusi, professore, ma a che cosa serve?» è stato messo in luce recentemente in D'Amore, Fandiño Pinilla, 2001

ancor più difficile credere nell'equipotenza, se si ragiona in termini finiti.
Il caso del numero degli interi relativi **Z** che, secondo il questionario, "qualcuno sostiene" essere il doppio di quelli naturali **N** (questi ultimi risultano chiaramente e visivamente, in ogni modello figurale proposto da libri ed insegnanti, in corrispondenza biunivoca con la "metà" positiva di **Z**) mette a disagio maggiormente gli studenti svizzeri (risposte corrette 40%) che non gli italiani (risposte corrette 60%). Una spiegazione potrebbe essere questa: gli svizzeri sono più "scolarizzati" (D'Amore, 1999a), vale a dire, in breve, hanno più accettazione acritica di ciò che si fa a scuola e quindi rispondono meglio alle domande concernenti materia già elaborata. La domanda 2d è nuova ed è sufficientemente intrigante per destabilizzare uno studente diligente, ma troppo attaccato alla sola teoria oggetto di studio in aula.

Anche la domanda 3 è in parte fuorviante, perché addirittura tende ad ingannare lo studente usando a sproposito criteri di giudizio validi solo per insiemi finiti; ma ciò ha evidentemente la giustificazione di rendere più critico lo studente in questa fase del test. Globalmente gli italiani hanno nettamente più successo dei loro colleghi svizzeri: l'82% di loro afferma di credere che vi siano tanti razionali quanti sono i numeri naturali, contro solo il 58% degli svizzeri. Ma se si analizzano le ragioni addotte, balza all'occhio la percentuale di italiani che crede in virtù del fenomeno di appiattimento (67% contro il 30% degli svizzeri). D'altra parte gli svizzeri non smentiscono quanto osservato nel corso della domanda 2, perché il 28% di loro crede nell'equipotenza tra **Q** ed **N** perché "hanno visto in classe una dimostrazione chiara e convincente", contro l'11% degli italiani. Sicuramente ciò non è dovuto né a questioni geografiche né tanto meno a fenomeni biologici: riguarda certo il differente tipo di rapporto esistente tra studente e istituzione scolastica ed anche il diverso modo di interpretare il contratto pedagogico ed alcune clausole del contratto didattico nei due Paesi.
Allo stesso ordine di idee ci pare debba inscriversi anche il fatto che nessuno svizzero ritiene che l'equipotenza tra **Q** ed **N** sia vera perché "è contraria al buon senso", mentre il 3% degli italiani sceglie proprio questa risposta: segno di una certa ironia che manifesta un modo diverso di intendere il rapporto con la scuola: piccolo segno,

statisticamente, ma tale da confermare alcuni punti detti sopra. E ancora: il 39% degli svizzeri crede che **Q** sia "più grande" di **N** e sceglie un riferimento insiemistico, optando per la risposta "perché l'insieme dei razionali è più grande di quello dei naturali", ciò che denuncia un bisogno di appoggiarsi acriticamente a una teoria che non destabilizzi il "senso comune"; gli italiani sono meno inclini ad assumere questo atteggiamento (solo il 13% di loro sceglie questa risposta).

Con la domanda 4a si entra nel vivo del più importante fra i teoremi di Cantor presi in considerazione. Gli svizzeri danno il 75% di risposte esatte contro il 45% di quelle degli italiani. Certo, qui non c'è più "senso comune" che possa aiutare: chi ha più fiducia in ciò che si fa a scuola, ha più probabilità di rispondere correttamente. Tuttavia tra l'aver risposto correttamente sul questionario e l'aver veramente capito c'è una differenza che sarebbe estremamente grave dimenticare. E poi: che cosa vuol dire "aver veramente capito?". Queste considerazioni ci fanno dire che i risultati del test che stiamo esaminando, da soli, sono poco chiarificatori. Se vogliamo raggiungere un minimo di credibilità, dobbiamo approfondire taluni aspetti e ricercare, per quanto sia possibile, le vere ragioni che stanno dietro a queste risposte. Rimandiamo questa problematica al prossimo paragrafo 9. nel quale presenteremo i risultati dei colloqui.
La domanda 4b presenta la stessa situazione della precedente, ma allarga l'insieme dei razionali compresi in]0, 1[a tutto l'insieme **Q**. Con questa domanda si vorrebbe vedere fino a che punto le risposte esatte date alla 4a sono fondate e preparare il terreno alle domande successive. Il risultato è fortemente illuminante per la nostra ricerca: messo a più dura prova, il convincimento di chi ha risposto esattamente alla 4a si rivela alquanto debole: gli svizzeri scendono dal 75% di risposte corrette al 49%, gli italiani dal 44% al 22%. Non possiamo non ribadire quanto detto prima, riguardo all'effettiva attendibilità dei test scritti. Gli stessi studenti che affermano (correttamente) che nell'intervallo]0, 1[vi sono più reali che razionali, ma che poi sostengono che in Q vi sono più razionali che reali in]0, 1[, hanno veramente capito la differenza essenziale che esiste fra le cardinalità di questi insiemi numerici? Dobbiamo supporre di no; eppure, se ci

fossimo limitati alla domanda 4a, avremmo potuto concludere il contrario.
Fra le risposte errate notiamo che l'effetto della *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" dell'insieme si rivela abbastanza chiaramente (ne sono vittima circa il 6% degli svizzeri e il 15% degli italiani). Sicuramente la scuola svizzera che, come già detto, mostra di avere norme contrattuali più forti, inibisce in buona misura la caduta verso la dipendenza, ciò che non avviene in un contesto didattico più libero come quello italiano. Anche l'*appiattimento* si rivela molto presente: il 24% degli svizzeri e il 38% degli italiani sostengono che i due insiemi (**Q** e **R**) hanno la stessa cardinalità a causa del fatto che sono entrambi infiniti. Infine può essere interessante notare che circa il 12% della totalità degli studenti considera la domanda indecidibile: sono forse studenti sulla via di una vera comprensione, che esprimono in questo modo la loro situazione di incertezza?
La domanda 4c mostra come l'effetto della *dipendenza* giochi in modo marcato: ampliando l'insieme dei reali dall'intervallo]0, 1[a tutto R, le risposte esatte degli svizzeri passano dal 49% al 70% e quelle degli italiani dal 22% al 39%. Per questi studenti, in]0, 1[i reali sono meno numerosi dei razionali (di tutto **Q**), ma se si considera tutto l'insieme R, allora vi sono più reali di razionali. Come dire: ampliando l'insieme, aumenta la numerosità; affermazione corretta se ci si limita a insiemi finiti, ma che non può essere estesa direttamente ai casi di insiemi infiniti. Di nuovo fa capolino il "senso comune", cioè l'impiego di procedure che sono affidabili solo per insiemi finiti. E, a nostro avviso, c'è forse ancora qui l'influenza del modello figurale *sulla* (nel caso di **Q**) e *della* (nel caso di **R**) retta geometrica r:

- nel primo caso, essa è solo un "supporto visivo" di **Q**, ma non pienamente occupata (in modo continuo) dagli elementi di **Q** stesso
- nel secondo caso, valendo la continuità, vi sarà una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta ed i reali di **R** e dunque si potrebbero addirittura confondere **R** ed r.

Questa distinzione non è certo aiutata dall'acritico uso del supporto retta [che inizia fin dalla Scuola Elementare per **N**, con vari problemi didattici (Gagatsis, Panaoura, 2000), e prosegue poi nella Scuola Media per **Z**]. Su questo punto occorrerebbe riflettere più a lungo.
La domanda 4d sposta la problematica dell'infinito attuale dal campo numerico a quello geometrico. Le risposte esatte costituiscono il 52%

circa della totalità degli studenti, senza differenze significative fra svizzeri e italiani. Sicuramente parte di queste risposte sono dovute all'effetto dell'*appiattimento*. La questione sarà approfondita nel prossimo paragrafo 9., sulla base delle risultanze dei colloqui.
La *dipendenza* gioca ancora un ruolo importante: circa il 27% della totalità degli studenti è convinto che vi siano più punti sull'intera retta rispetto a quelli del segmento lungo 2 cm, mentre solo l'1% del totale (2 studenti) risponde che vi sono più punti nel segmento.[9] La pattuglia degli indecisi rappresenta circa il 18% della totalità.

9. Descrizione dei risultati dei colloqui e verifica delle ipotesi formulate in 5.

I colloqui hanno interessato 36 studenti svizzeri, che sono stati intervistati dai due ai tre mesi dopo il test; e 32 studenti italiani che sono stati intervistati subito dopo i test, nel corso delle stesse sedute (naturalmente protrattesi per diversi giorni). Si è concentrata l'attenzione sulle domande 2b, 2d, 3, 4b e 4d. Scopo principale del colloquio era di cercare, nel limite del possibile, di capire le ragioni che si nascondono dietro alle risposte.

9.1 Risultati delle interviste agli studenti svizzeri

Numeriamo gli studenti intervistati da 1 a 36. Ci limitiamo a indicare i casi di cambiamento di opinione.

Domanda 2b
Con il colloquio abbiamo cercato di mettere in crisi quegli allievi che si erano dichiarati convinti che vi sono tanti multipli di 997 quanti sono i numeri naturali, facendo leva sul "senso comune". La nostra obiezione, in sintesi, è stata questa per tutti: *«Guarda che, percorrendo la successione dei naturali, il primo multiplo di 997 lo trovi dopo aver*

[9] Tale risposta evidentemente assurda è data per spirito di contraddizione?, o per manifestare un disagio?, o perché si ha della matematica l'immagine che, quando non vi sono risposte certe o evidenti, si nasconde un trucco del quale solo l'insegnante è padrone? Tutti questi atteggiamenti e convizioni sono stati abbondantemente esplorati dalla ricerca internazionale e costituiscono oggi un filone tra i più gettonati.

scartato i numeri dallo 0 al 996, il secondo lo troverai solo dopo aver scartato tutti quelli fra 998 e 1993, e così via. Ti sembra veramente *che i due insiemi abbiano lo stesso numero di elementi?».*

Cambiamenti di opinione: 5 su 36 (14%)

allievo numero	prima del colloquio	dopo il colloquio
15	(4) del tutto convinto	(1) per nulla convinto
19	(3) abbastanza convinto	(4) del tutto convinto
22	(1) per nulla convinto	(4) del tutto convinto
28	(4) del tutto convinto	(1) per nulla convinto
33	(3) abbastanza convinto	(4) del tutto convinto

Hanno ceduto all'obiezione e cambiato la risposta 4 nella 1 (dichiarandosi addirittura "per nulla convinto") 2 soli studenti sui 36 intervistati. Anche se la percentuale è bassa, riteniamo significativo questo dato che conferma almeno la presenza di un ostacolo importante alla comprensione dell'infinito attuale: la misconcezione dell'applicazione ad insiemi infiniti di procedure corrette solo per insiemi finiti. Nei 2 studenti in questione, il fenomeno è avvenuto dopo che avevano risposto correttamente nel test. Ciò testimonia che una risposta corretta, soprattutto se data subito dopo un'attività di apprendimento imperniata su clausole forti di contratto didattico, non è indice sicuro di un apprendimento stabile. Dopo un paio di mesi l'effetto del contratto si affievolisce e se non c'è stato un apprendimento ben fondato (che in questo caso avrebbe dovuto eliminare radicalmente ogni riferimento a modelli intuitivi) ritornano a galla le misconcezioni.
A chi si dichiarava comunque convinto dell'equipotenza dei due insiemi, sottoponevamo quest'altra obiezione: «Va bene con i multipli di 997, perché, dopo tutto 997 è un numero relativamente piccolo. Ma ora cerca di pensare un numero naturale grandissimo, che chiamiamo G. Immagina ora l'insieme dei multipli di G: hai ancora il coraggio di affermare che questo ha lo stesso numero di elementi di **N**?».
Nessun allievo che abbia superato la prima obiezione si è lasciato ingannare da questa. In generale si sono dimostrati tutti convinti dalla relazione biunivoca tra N ed i multipli di G.
3 allievi che inizialmente non erano del tutto convinti dell'equipotenza tra i due insiemi (2 "abbastanza" convinti, 1 "per nulla convinto")

riflettendo sulle nostre obiezioni hanno finito per convincersi sulla base della citata corrispondenza biunivoca.

Domanda 2d

Nel colloquio ci siamo limitati a sottolineare l'apparente correttezza di quel tale che asserisce che il numero di interi relativi è il doppio dei naturali, facendo uso della misconcezione dovuta al "senso comune", che qui appare ancor più evidente, legata all'immagine grafica che si ha di solito, nella quale **N** sembra quasi coincidere con gli interi **Z** non negativi, essendo **Z** ordinato in modo naturale.

Cambiamenti di opinione: 7 su 36 (19%)

allievo numero	prima del colloquio	dopo il colloquio
8	(1) quel tale non ha capito nulla	(3) potrebbe aver ragione
12	(1) quel tale non ha capito nulla	(3) potrebbe aver ragione
15	(1) quel tale non ha capito nulla	(3) potrebbe aver ragione
22	(1) quel tale non ha capito nulla	(2) quel tale ha ragione
23	(3) potrebbe aver ragione	(1) quel tale non ha capito nulla
24	nessuna risposta	(1) quel tale non ha capito nulla
28	(1) quel tale non ha capito nulla	(2) quel tale ha ragione
29	(1) quel tale non ha capito nulla	(3) potrebbe aver ragione
32	(3) potrebbe aver ragione	(1) quel tale non ha capito nulla

Ben 6 allievi su 36, che avevano risposto correttamente nel test, hanno ceduto alla prima obiezione e hanno cambiato la loro risposta in "potrebbe aver ragione" (4 casi) o in "ha ragione" (2 casi). Di nuovo balza evidente ciò che abbiamo già affermato: in non pochi casi una risposta scritta corretta non è indice di apprendimento.
3 allievi hanno invece saputo approfittare del colloquio per migliorare il proprio apprendimento giungendo alla consapevolezza che " quel tale non ha capito nulla". 1 di questi allievi, che nel test scritto non si era espresso, ha saputo trovare da solo una valida giustificazione alla risposta corretta, dichiarando di non aver risposto perché era stato turbato dall'esistenza della contraddizione tra teoria e senso comune.

Domanda 3
È senza dubbio una domanda difficile, perciò ci aspettavamo di poter rilevare nuovi elementi per la nostra ricerca. Gli studenti erano dapprima resi attenti sul fatto che l'insieme **Q** è denso, mentre **N** non lo è affatto. Questa situazione, se trattata col senso comune, spalanca la via ad una evidente risposta errata. Nel colloquio abbiamo cercato di forzare questa misconcezione e i risultati non si sono fatti attendere. Non pochi studenti hanno cambiato opinione tornando sull'idea che l'insieme **Q** sia più numeroso di **N**.
La domanda posta è: «Credi che vi siano tanti razionali quanti naturali?».

Cambiamenti di opinione: 12 su 36 (33%)

allievo numero	prima del colloquio	dopo il colloquio
2	Sì (per l'appiattimento)	No (per la dipendenza)
6	Sì perché dimostrato	No (per la dipendenza)
7	Sì perché dimostrato	No (per la dipendenza)
9	Sì (per l'appiattimento)	No (per la dipendenza)
10	Sì perché dimostrato	No (per la dipendenza)
12	Sì perché dimostrato	No (per la dipendenza)
13	Sì perché dimostrato	No (per la dipendenza)
15	Sì (per l'appiattimento)	No (per la dipendenza)
22	Sì perché dimostrato	No (per la dipendenza)
23	Sì perché dimostrato	Sì (per l'appiattimento)
25	Sì (per l'appiattimento)	No (per la dipendenza)
28	Sì perché dimostrato	No (dim. non convincente)

Dopo il colloquio, ben 8 allievi (sui 36 intervistati) che avevano risposto correttamente nel test cambiano idea. 6 di loro cadono nel fenomeno della dipendenza, secondo il quale se un insieme A è più grande di un insieme B, allora automaticamente la cardinalità di A è maggiore di quella di B. Di nuovo osserviamo questo fatto ormai evidente consistente nell'estendere all'infinito attuale ciò che vale per insiemi finiti. La *dipendenza* è evidentemente conseguenza di questo comportamento, ma lo è anche l'*appiattimento* nel quale l'infinito viene considerato come un numero naturale, anche se non ben determinato. 1 studente di questi 8 non cade nella *dipendenza*, ma corregge la risposta che aveva dato correttamente nel test scivolando nell'*appiattimento*. Un altro, invece, ammette di non aver capito la dimostrazione, ma di aver risposto "così, per fiducia"; sollecitato a rispondere di nuovo, cambia il sì in no, affermando che la dimostrazione non lo convince. Gli altri 4 studenti, nel test, avevano risposto di sì, adducendo però una ragione legata all'*appiattimento*; tutti e 4 scivolano nella *dipendenza*: e abbiamo appena finito di dire che *appiattimento* e *dipendenza* sono aspetti di uno stesso fenomeno, vale a dire l'errata trasposizione di procedure proprie degli insiemi finiti a casi di insiemi infiniti.

Domanda 4b

Questa domanda, in un certo senso, esaspera il risultato del citato teorema di Cantor. Rispetto al teorema, viene ampliato solo l'insieme dei razionali dall'intervallo]0, 1[a tutto **Q**. La nostra obiezione ha fatto leva su questo ampliamento insiemistico, per vedere se e in che misura entrasse il fenomeno della dipendenza e facesse cambiare idea a qualche studente che aveva risposto correttamente nel test (o viceversa).

Cambiamenti di opinione: 11 su 36 (31%)

allievo numero	**prima del colloquio**	**dopo il colloquio**
7	(1) vi sono più razionali	(4) non si può dire
12	(1) vi sono più razionali	(3) stessa cardinalità
13	(1) vi sono più razionali	(3) stessa cardinalità
14	(1) vi sono più razionali	(3) stessa cardinalità
15	(3) stessa cardinalità	(1) vi sono più razionali
19	(1) vi sono più razionali	(4) non si può dire
24	(1) vi sono più razionali	(3) stessa cardinalità
25	(2) vi sono più reali	(4) non si può dire
28	(4) non si può dire	(1) vi sono più razionali
33	(1) vi sono più razionali	(4) non si può dire
34	(1) vi sono più razionali	(4) non si può dire

Degli 11 studenti che hanno cambiato idea durante il colloquio, solo 1 aveva risposto correttamente nel test e sceglie di allinearsi su un laconico "non si può dire": siamo di fronte ad un conflitto tra l'effetto della *dipendenza* ed il contratto didattico, causa principale della scelta iniziale "corretta". Degli altri, 8 studenti che nel test avevano scelto la risposta errata secondo la quale vi sarebbero più razionali in **Q** che reali in]0,1[, 4 si rifugiano nel "non si può dire" e gli altri 4 scelgono l'opzione della stessa cardinalità, spinti dal fenomeno dell'*appiattimento*, come si evince dalle spiegazioni orali. Infine 2 studenti cambiano opinione sotto l'effetto della dipendenza e si allineano sulla risposta "vi sono più razionali in **Q**", rifiutando le risposte date nel test ("stessa cardinalità" e "non si può dire"). Gli altri studenti che avevano risposto correttamente hanno resistito molto bene all'obiezione mostrando di aver acquisito una salda convinzione. La nostra ipotesi è che la maggior parte di quelli che sono riusciti a capire questo impegnativo teorema di Cantor costituiscono un'élite di studenti che hanno realmente costruito il loro apprendimento. Chi invece risponde "per contratto", cede alla prima obiezione.

Domanda 4d

Con questa domanda volevamo vedere in che misura agisse l'effetto della *dipendenza* della cardinalità dalla grandezza, in àmbito geometrico. Nella prima parte della presente ricerca (1999) avevamo già sondato questo aspetto, ma facendo precedere al test un momento di apprendimento nel quale si era presentata una dimostrazione del fatto che due segmenti hanno lo stesso numero di punti, indipendentemente dalla loro lunghezza. Qui, per contro, non si è premesso nulla, in modo da poter verificare se la lunga riflessione sulla cardinalità degli insiemi numerici avesse un effetto sulla citata questione geometrica.

Cambiamenti di opinione: 8 su 36 (22%)

allievo numero	prima del colloquio	dopo il colloquio
5	(3) stessa cardinalità	(4) non si può dire
8	(3) stessa cardinalità	(4) non si può dire
10	(3) stessa cardinalità	(4) non si può dire
12	(3) stessa cardinalità	(2) più punti sulla retta
19	(4) non si può dire	(2) più punti sulla retta
24	(1) più punti nel segmento	(3) stessa cardinalità
25	(4) non si può dire	(2) più punti sulla retta
29	(3) stessa cardinalità	(4) non si può dire

Degli 8 studenti che hanno cambiato idea durante il colloquio, 5 avevano risposto correttamente nel test; 4 di loro correggono in "non si può dire", denotando di non aver ben fondato l'apprendimento, mentre 1 opta per "più punti sulla retta" cadendo chiaramente nella *dipendenza*. Altri 2 studenti cadono nella *dipendenza*, modificando la primitiva risposta "non si può dire" in "più punti sulla retta". Infine uno studente che aveva risposto "più punti nel segmento" dice di essersi sbagliato a mettere la crocetta e corregge in "stessa cardinalità" ma, giustificandosi, dimostra con la sua argomentazione che si allinea fra le vittime dell'*appiattimento*.

9.2 Risultati delle interviste fatte agli studenti italiani

Le differenze principali tra le modalità di intervista in Svizzera ed in Italia sono state le seguenti:

- in Svizzera l'intervista era sempre condotta individualmente; in Italia, 16 dei 32 intervistati, sono stati posti a confronto; dunque abbiamo 8 coppie di intervistati e 16 intervistati singolarmente;
- in Svizzera l'intervista avveniva dopo 2-3 mesi dallo studio del testo (riportato qui in Appendice 1); in Italia l'intervista era sempre fatta immediatamente a seguito dello studio del testo; ma lo studio poteva essere eseguito in aula (in assenza del ricercatore) e dunque discutendolo anche con i compagni; oppure direttamente in presenza del ricercatore; in tal caso, il ricercatore non interveniva mai durante la fase di studio; nel caso di studio a coppie (le 8 coppie di cui sopra), gli studenti potevano discutere tra loro.

Di fatto, tranne che in rarissimi casi senz'alcuna incidenza statistica, la discussione tra i compagni delle coppie intervistate insieme **non** ha mai portato a far modificare ad uno dei due l'opinione che aveva assunto. Anche quando tale discussione si è fatta veemente (il che è realmente accaduto in 2 casi), resistere sulla propria opinione e non voler mutare atteggiamento a causa delle sollecitazioni del compagno sembrava quasi un dovere. Al contrario, come vedremo, gli studenti hanno a volte cambiato opinione, rispetto a quella scelta sui test, dopo le insidiose domande del ricercatore.

Questo atteggiamento ha senz'altro a che fare con il contratto di ricerca (Schubauer Leoni, 1988, 1989; Schubauer Leoni, Ntamakiliro, 1994; D'Amore, 1999b, pagg. 119-122) che stabilisce tra studente e ricercatore una relazione vagamente analoga a quella tra studente e insegnante, ma meno scolastica, a causa del fatto che lo studente è consapevole della mancanza di valutazione e del significato della presenza del ricercatore in aula (in assenza dell'insegnante).

Domanda 2b

Il senso dell'intervista a questo proposito è esattamente lo stesso già evidenziato in **9.1**. Si deve ammettere che alcuni studenti si mostrano come sbalorditi di fronte al fatto che se a 0 (di **N**) si fa corrispondere 997 (di $\{k \cdot 997, k \in N\}$), per trovare il corrispondente di 1 bisogna andare a 1994, per 2 addirittura a 2991 etc. Era come se, nel corso delle risposte al test, gli studenti non se ne fossero resi conto. Anche se in ben 3 casi su 8 delle interviste a coppie, uno degli intervistati ha cercato di convincere l'altro che tali numeri, rispetto all'infinito, erano comunque «bazzecole» (così ha spontaneamente detto uno studente di Casalecchio), incredibilmente si sono avuti vari casi di ripensamento in senso negativo:

Cambiamento di opinione: 7 su 32 (22%)

4 allievi passano dalla risposta 4 (del tutto convinto) alla 1 (per nulla convinto)

3 allievi passano dalla risposta 3 (abbastanza convinto) alla 1 (per nulla convinto)

Resistono nelle loro risposte 1 e 2 tutti gli studenti, anche se da parte nostra c'era il tentativo di mostrare che "distanze numeriche" come 997 fossero risibili di fronte all'infinito. Più d'uno risponde che non sa immaginarsi che cosa succeda «laggiù», «all'infinito», «con numeri così enormi» e simili.

Tutti i cambiamenti di opinione sono, dunque, al negativo. Questo a nostro avviso testimonia che la risposta alla domanda 2b nel test è stata data con superficialità e, anche se corretta, non era frutto di convinzione né di acquisita competenza.

Domanda 2d

Dalle interviste risulta chiarissimo che non è ipotizzabile un ordine degli elementi di **Z** che non sia quello “naturale”: ... $^-3$ $^-2$ $^-1$ 0 $^+1$ $^+2$ $^+3$ ...; ordini diversi, escogitati per creare poi la corrispondenza biunivoca tra **Z** ed **N**, come 0 $^-1$ $^+1$ $^-2$ $^+2$ $^-3$ $^+3$ ... o altri analoghi, semplicemente **non** vengono accettati. Su questo punto si dovrebbe indagare oltre. Sembrano “trucchi” (dice uno studente di Bologna: «Ah, va beh, ma allora si può dimostrare tutto»).

Dunque, se è vero com’è vero, che nelle risposte al test diversi allievi avevano dichiarato di accettare l’equipotenza tra **N** e **Z**, sulla base dello studio fatto del nostro testo, la convinzione crolla immediatamente al primo timido attacco critico. Nell’intervista abbiamo fatto uso dell’immagine della “semiretta naturale” r_N e della “retta intera” r_Z, subdolamente disegnate “parallele” in modo tale che r_N avesse, nel disegno, l’origine esattamente in verticale sullo 0 di r_Z. Questa immagine ha causato vari... crolli. In un caso di discussione accesa tra due intervistati in coppia nella quale uno sosteneva la tesi 1 (quel tale non ha capito nulla) mentre l’altro era passato dalla 3 (potrebbe aver ragione) alla 2 (quel tale ha ragione), si è avuto modo di assistere ad una vera e propria difesa dell’ordine naturale: non ha senso disporre gli elementi di **Z** a piacere, giacché, per esempio, $^-2$ è e sempre sarà minore di $^-1$. In questo caso, stante il clima acceso della polemica, l’intervistatore ha suggerito al secondo intervistato della coppia di rivedere allora la sua posizione circa il fatto che il conteggio non dipende dall’ordine degli oggetti. Lo studente ha ammesso che se si tratta di “oggetti” (ed intendeva chiaramente “oggetti concreti”) allora sì; ma se si tratta di numeri o di “cose che stanno in ordine”, allora no. Gli si è fatto l’esempio delle poltrone di un teatro e lo studente ha confermato che si tratta di “cose” e non di “numeri”: «Quel che conti sono le sedie e non i loro posti».

Cambiamento di opinione: 8 su 32 (25%)

4 allievi passano dalla risposta 1 (quel tale non ha capito nulla) alla 2 (quel tale ha ragione)

3 allievi passano dalla risposta 3 (quel tale potrebbe aver ragione) alla 2

1 allievo passa dalla risposta 1 all’ammissione di non sapere più che cosa dire e pensare e non vuol più scegliere alcuna delle risposte previste nel test (anche dopo varie sollecitazioni).

Dalle interviste però è assolutamente ovvio che chi risponde 1 lo fa non tanto perché è convinto della dimostrazione vista nel testo, ma per motivi di appiattimento; anche lo studente della coppia... infuocata di cui sopra, tra le frasi che dice per convincere l'irriducibile compagno, esclama ad un certo punto: «Ma non capisci che tanto sono tutti infiniti? Proprio non lo capisci?».

Domanda 3

L'intervista sulla domanda 3 costituisce uno dei momenti cardine dell'esperienza.

Molti studenti, tra quelli che mostrano di capire che cosa vuol dire "denso", sembrano da ciò indotti a dichiarare che vi sono più razionali che naturali; ma qualcuno cambia idea, non tanto per la dimostrazione data nel testo (che, peraltro, è data per compresa all'inizio da molti, ma poi viene dichiarata "troppo difficile", "complicata", "complessa", "sottile" e simili), quanto per l'appiattimento. A differenza di quanto accade nelle interviste in Svizzera, qui l'appiattimento è la causa più forte dell'abbandono della risposta corretta.

Cambiamento di opinione: 11 su 32 (34%)

8 allievi passano dalla risposta «Vi sono tanti razionali quanti naturali perché l'abbiamo dimostrato», alla risposta negativa («Ci sono più elementi in **Q**»); e la causa che si rileva evidente dall'intervista è l'appiattimento

3 allievi passano dalla risposta «Vi sono tanti razionali quanti naturali» data a causa dell'appiattimento, alla risposta negativa; e la causa che si rileva evidente dall'intervista è la dipendenza.

Va detto, di passaggio, che si ha la netta impressione che non sia ben chiaro che cosa sia davvero la densità di **Q**.

Uno degli studenti che cambia opinione, scrive proprio: $\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}$; evidentemente qui l'ostacolo epistemologico è forte; ma è forte anche quello didattico: come fa un sottoinsieme ad avere lo stesso numero di elementi dell'insieme di cui è sottoinsieme? Si mescolano qui: uno degli assiomi euclidei (il tutto è maggiore della parte) che ha buon gioco nella prassi didattica, anche se non in modo esplicito; ed il

continuo e più volte denunciato tentativo di prolungare l'applicabilità di modelli intuitivi che funzionano nel finito, all'infinito, misconcezione di origine didattica.
Vorremmo evidenziare qui una bella discussione avvenuta tra due studenti, entrambi d'accordo sul fatto che ci siano più elementi in **Q** che non in **N** («Molti, anzi moltissimi più», dice la ragazza); sostanzialmente la ragazza sostiene (sorvoliamo sul linguaggio usato) che ogni elemento n di **N** (sorvoliamo anche sullo 0) ha un suo corrispondente 1/n tra 0 ed 1 in **Q** (il che è vero) e da qui desume la densità di **Q**. Ebbene i due studenti sono d'accordo sulla risposta negativa, ma l'una per motivi di appiattimento e l'altro per motivi di dipendenza.

Domanda 4b

La risposta a questa domanda va strettamente collegata con la precedente, la 4a; le ricordiamo entrambe, per comodità del lettore:
4a. Vi sono più numeri reali tra 0 e 1 oppure più numeri razionali tra 0 e 1?
4b. Vi sono più numeri reali tra 0 e 1 oppure più numeri razionali in tutto l'insieme Q?
Diversi sono gli studenti che sono pronti ad ammettere nella prima che vi siano più reali tra 0 ed 1 che non razionali tra 0 ed 1, ma si lasciano poi ingannare dalla dipendenza nella domanda successiva.
Cosicché l'analisi dei cambi di opinione su 4b coinvolge anche 4a. Infatti, alcuni degli studenti che cambiano opinione in 4b passando da una risposta corretta ad una scorretta, rivedendo 4a non sono più tanto disposti a confermare la precedente risposta corretta ed optano o per una scelta di cardinali uguali o per una risposta che esprime incertezza. In ogni caso, qui appiattimento e dipendenza la fanno da padroni in larghissima percentuale.

Cambiamento di opinione: 10 su 32 (31%)

4 allievi passano dalla risposta 2 (vi sono più reali) alla 1 (vi sono più razionali)
3 allievi passano dalla risposta 2 alla 3 (hanno la stessa cardinalità)
2 allievi passano dalle risposte 1 e 2 alla 3
1 solo allievo passa dalla risposta 3 alla 2.

Questo allievo, l'ultimo descritto, riveste un certo interesse. Aveva risposto, nella 4a, che ci sono più reali che razionali nell'intervallo tra 0 ed 1; e, nella 4b, aveva dato la risposta 3. La giustificazione era (gli è stata espressamente chiesta) che, se è vero che ci sono più reali che razionali tra 0 ed 1, è anche vero che passando dal solo intervallo detto a tutta la retta «se ne aggiungono un casino». «Ma perché sono tanti da "pareggiare" la cardinalità?», gli ha chiesto l'intervistatore. Dapprima lo studente sembrava aver dato la risposta a causa dell'appiattimento, ma poi se n'è uscito con una frase molto interessante; ha dichiarato che si era sbagliato in 4b, che la riposta che voleva dare era la 2 perché «Se ci sono più numeri reali che razionali lì [indicando l'intervallo tra 0 ed 1] che cosa me ne importa se si aumenta tutto; non è che moltiplicando aumenti l'infinito; se era più piccolo, resterà sempre più piccolo». Se interpretiamo bene, è come dire che, indicando con **n** l'infinità del numerabile e con **c** quella del continuo, non è possibile trovare un multiplo di **n** che superi **c**. E questo è perfettamente vero (perfino moltiplicando **n** per **n** stesso).
A parte questo caso, abbiamo la netta impressione che un attento esame del vero significato delle domande metta in crisi gli studenti; non solo chi fonda la sua risposta positiva sul contratto cede alla prima analisi critica, ma anche chi si ritiene che abbia costruito una conoscenza, sembra averlo fatto in modo debole e poco fondato: non di vera e propria costruzione personale si tratta, dunque, ma solo di apprendimento epidermico.

Si può notare a questo punto, ma lo faremo notare anche in **11.**, che tra gli studenti svizzeri si hanno in vari casi cambiamenti di opinione dal negativo al positivo, cioè da posizioni scorrette a posizioni corrette; mentre tra gli studenti italiani è assai più frequente o addirittura quasi univoco il contrario.

Domanda 4d

Questa domanda (Vi sono più punti in un segmento lungo 2 cm o in una retta?) costituisce in verità una specie di trabocchetto finale; esula dal tema specifico della ricerca, ma serve parecchio sia per vagliare le risposte precedenti, sia per condurre l'intervista. Essa permette infatti di

verificare se nello studente è presente in modo ovvio l'appiattimento; nel caso vi sia, è spesso successo che questo fosse in contraddizione con risposte date in precedenza, dalle quali invece sembrava evincersi che lo studente ne fosse privo. Dunque è una domanda che permette una discussione appassionata: l'apparente semplicità della domanda, così diversa da alcune delle precedenti, permette allo studente di rispondere con una certa libertà cognitiva, scevra da concetti appena appresi nel corso dello studio del nostro testo (quello posto in Appendice 1), facendo ricorso ai suoi modelli intuitivi.
Dobbiamo riconoscere che la domanda ha avuto effettivamente questo ruolo, e con grande efficacia.
Lo studente dovrebbe a questo punto aver capito che due segmenti, considerati come insiemi di punti, hanno la stessa cardinalità, indipendentemente dalla loro lunghezza (dunque: non vale la dipendenza); ma dovrebbe anche aver appreso che esistono almeno due tipi di cardinalità diverse (dunque: non vale l'appiattimento).
Tuttavia, tra un segmento lungo 2 cm e una retta, considerata attualmente nella sua totalità, c'è una bella differenza.
Chi risponde che c'è la stessa quantità di punti o lo fa cadendo nell'appiattimento o perché ricorda alcune domande precedenti nelle quali il passaggio da un intervallo (di **Q** o di **R**) a tutto l'insieme (rispettivamente **Q** o **R**) non modificava la cardinalità. E tuttavia, un conto è passare da un intervallo ad un insieme, ben altro è da un segmento (corto) ad una retta.
La maggior parte dei cambiamenti avviene da una situazione di sicurezza ad una di incertezza che, in taluni casi, sembra essere un benefico avvio verso un tentativo di (ri)costruzione della conoscenza.

Cambiamenti di opinione: 9 su 32 (28%)
3 studenti passano dalla risposta 3 (stessa cardinalità) alla 2 (più punti sulla retta)
3 studenti passano dalla risposta 3 alla 4 (non *si può* dire; nel senso di: non *lo so* dire)
2 studenti passano dalla risposta 2 alla 3
1 studente passa dalla risposta 2 alla 4.

Il motivo dei 3 passaggi da 3 a 2 è la dipendenza: risulta chiarissimo dalle interviste; quello dei 2 passaggi da 2 a 3 è l'appiattimento: idem.

I casi di violenta discussione tra gli studenti delle coppie intervistate insieme, qui sono stati di grande interesse.
In un caso uno studente A mostrava all'altro B un'evidente contraddizione: B aveva precedentemente asserito che passando dall'intervallo]0, 1[di Q a tutto Q non c'era aumento di cardinalità, mentre asseriva anche che nel passare da un segmento ad una retta sì, c'era aumento di cardinalità. La contraddizione era evidente. Lo studente B replica che: «Si vede che tra i numeri e la geometria non è tutta la stessa cosa, cioè si vede che la geometria non è insomma come i numeri». Di fronte ad una situazione di incoerenza, lo studente B non cerca dentro di sé di risolverla, modificando le proprie conoscenze e le proprie posizioni (soluzione endogena), ma cerca una giustificazione nella natura stessa delle cose, fuori di sé (esogena). Messo alle strette dall'incalzare di A, ad un certo punto B sembra disposto a cambiare le proprie opinioni riguardo alle affermazioni precedenti, piuttosto che rivedere le sue convinzioni tra segmento e retta. Ma poi desiste e preferisce accettare l'opinione del suo compagno.

10. Risposte alle domande formulate in 4.

Siamo finalmente in grado di rispondere alle domande di ricerca, formulate in **4.**

P1. La risposta ci pare ampiamente negativa. Ci pare di poter affermare che il senso di questi teoremi e le loro dimostrazioni si rivelino ampiamente al di sopra delle capacità di comprensione degli studenti, per quanto maturi, del penultimo e dell'ultimo anno delle superiori, senza differenza tra i due livelli. Il senso dei teoremi sfugge ai più; anche se, lì per lì, sembra compreso, alla prova dei fatti, grazie ai test ed alle interviste, si capisce che, al contrario, sfugge. Quanto alle dimostrazioni, succede un fatto curioso: esse vengono definite "facile", "l'ho capita", perfino "bella", al momento dello studio; ma poi, al momento in cui si vuol verificarne l'avvenuta assimilazione sottoponendo lo studente all'intervista, si rileva facilmente che esse non penetrano, non incidono, non permangono, non possono insomma far parte del bagaglio cognitivo di uno studente di quell'età e di quel

livello scolastico (in particolare il teorema che stabilisce la non numerabilità di **R**).
Resta il dubbio se dipenda dall'età o dal livello scolastico e se studenti ancora più evoluti, ma non necessariamente studenti dei corsi di laurea in matematica, siano pronti a comprendere veramente questi teoremi. Abbiamo l'impressione di no. E questo allora potrebbe essere ìnsito nella tematica stessa dell'infinito matematico, totalmente impregnata di ostacoli epistemologici. Abbiamo come l'impressione che solo uno studio specifico di questa tematica permetta di superarli.

P2. Risulta evidente dalla ricerca che, a parte gli ostacoli epistemologici (già ben noti in generale dalla letteratura e da noi più volte evidenziati) vi sono forti ostacoli didattici. Essi riguardano soprattutto il... mistero che circonda a scuola, nei livelli precedenti, tutto quanto concerne l'infinito che o non viene trattato per nulla, o viene banalmente ridotto ad un'estensione del finito. Ciò è causa spesso, troppo spesso, di modelli intuitivi che costituiscono vere e proprie misconcezioni.
Lo studente confonde l' "essere sottoinsieme" con l' "avere meno elementi", il che è vero nel finito, ma solo nel finito; avendo avuto continue conferme di ciò, lo ha assunto come modello intuitivo proprio e lo considera come un fatto assoluto. Tale convinzione permane e si rafforza, tanto da costituire un ostacolo insormontabile al momento in cui l'infinito è trattato in modo attuale e si ha bisogno di eliminare l'assioma euclideo del tutto e delle parti.
Collabora con questa misconcezione il modello geometrico della retta come collana di punti, che dapprima rende complessa o forse addirittura impossibile l'idea di densità e poi collabora a rendere impossibile l'idea di continuità. Inoltre rende impossibile superare l'assioma euclideo di cui sopra.
Ancora, del tutto negativa è l'insistenza sul modello "naturale" dell'ordine di **Z** che, proprio per la sua estrema semplicità ed immediatezza (sia concettuale che grafica), si rivela poi univoco ed insuperabile.
Infine, appiattimento e dipendenza, già messi sotto accusa in Arrigo, D'Amore (1999), si confermano colpevoli di molteplici misconcezioni.

P3. Ci sono dunque vari e notevoli ostacoli didattici. Possiamo ritenere l'appiattimento un miscuglio tra ostacolo epistemologico e didattico, ma abbiamo rilevato anche che esso fa tutt'uno con la dipendenza, come facce della stessa medaglia. Ebbene, se uno studente cade nell'appiattimento-dipendenza (appiattimento, perché **N** e **Z** sono entrambi infiniti; dipendenza, perché per molti studenti $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$) e lungo il corso dello studio del nostro testo si rende conto dell'esistenza di infiniti di natura e di potenza diversi, rivede tutto il suo pensiero al proposito; ma questo è rarissimo: ci è apparso (ed è evidente dai risultati delle interviste analizzati in **9**.) che la maggior parte degli studenti trova più sicuro appoggiarsi all'appiattimento-dipendenza, piuttosto che accettare il senso dei teoremi di Cantor qui analizzati. Se ciò crea contraddizioni e situazioni di incoerenza, non è detto che lo studente le risolva mettendosi in crisi e rivedendo le posizioni precedenti, ma cerca appigli a lui esterni, per esempio nella natura stessa delle cose matematiche: è la matematica che è coerente solo localmente e non globalmente. Questa posizione, peraltro già rilevata dalla letteratura ed evidenziata anche in Arrigo, D'Amore (1999), sembra dovuta ad un'immagine della matematica frammentata e parziale, difficilmente superabile. Sull'immagine della matematica presso gli studenti si dovrebbe lavorare parecchio in modo esplicito.
Non solo quest'ultimo punto, ma anche i precedenti, dovrebbero essere presi in esame per reimpostare da un lato la didattica su alcuni argomenti da parte degli insegnanti e dall'altro per studiare la lista dei contenuti da proporre agli insegnanti in via di formazione iniziale per qualsiasi livello scolastico. Ma di ciò, in **11**.

P4. Dai colloqui è risultato chiaramente come la comprensione delle affermazioni e delle dimostrazioni in oggetto sia molto superficiale, spesso basata su una fiducia acritica di ciò che viene proposto in aula dall'insegnante oppure addirittura sui due errori più frequenti: *appiattimento* e *dipendenza*. Messi alle strette durante il colloquio, gli studenti cambiano opinione e modificano la propria risposta data nel test in percentuali significative:

1. media del 23,8% con una punta massima di 33% per gli svizzeri
2. media del 28% con una punta massima di 34% per gli italiani.

Questi risultati confermano quanto osservato nel punto precedente e accentuano la necessità di intervenire sul piano didattico per fare in modo che gli studenti possano affrontare lo studio dell'Analisi con una buona competenza preliminare sugli insiemi infiniti.

11. Osservazioni conclusive

Cominciamo con l'affermare che a nostro avviso una conoscenza, una formazione, un'educazione matematica attuale non può prescindere da alcune competenze basilari sugli insiemi infiniti.
La trattazione delle problematiche concernenti l'infinito attuale richiede lo sviluppo di modelli intuitivi diversi e in alcuni casi contradditori rispetto a quelli che si usano nel finito. Ne deriva un'importante indicazione didattica: già nella scuola di base occorre iniziare un'educazione alla trattazione degli insiemi infiniti che permetta all'alunno di rendersi conto delle principali differenze che tale modo di pensare comporta rispetto all'àmbito finito. Ciò va fatto sia nel campo numerico sia in quello geometrico.
Nel campo numerico occorre prima di tutto convincersi della caduta dell'assioma euclideo "il tutto è maggiore di ogni sua parte (propria)", del fatto che un insieme avente infiniti elementi può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio, delle stranezze che si ottengono quando si applicano le operazioni aritmetiche ai numeri transfiniti (cioè ai cardinali di insiemi infiniti).
Per esempio, se α è un numero transfinito e k un numero naturale diverso da zero, sono espressioni corrette:
$\alpha + \alpha = \alpha$ $\quad$ $k \cdot \alpha = \alpha$ $\quad$ $\alpha \cdot \alpha = \alpha$ $\quad$ $\alpha^k = \alpha$

Sarebbe pure interessante, eventualmente con studenti prossimi alla maturità, giungere alla comprensione della formula $2^\alpha > \alpha$, anche se, almeno per gli studenti da noi coinvolti, sembrerebbe obiettivo troppo alto.

Nel campo geometrico, gli studenti osservati hanno mostrato di possedere una visione assai distorta della topologia della retta: i concetti di densità e di continuità non sono per nulla capiti, anzi l'immagine ingenua della retta come collana di perle (nella quale ogni perla rappresenta un punto geometrico) è per molti l'unico supporto alla teoria: ciò spiega senza alcun dubbio la difficoltà che gli studenti (la quasi totalità del nostro campione) incontrano nel capire come mai i punti con ascissa razionale non riempiono la retta e come si possa asserire seriamente che in un segmento lungo 2 cm vi sono tanti punti quanti ve ne sono in una retta intera.

I risultati della presente ricerca ci spingono a lanciare a tutti gli insegnanti un forte segnale di emergenza: è necessario curare i concetti relativi agli insiemi infiniti già a partire dalla scuola di base, coinvolgendo gli alunni in esperienze significative, aiutandoli a costruire immagini intuitive coerenti con la teoria degli insiemi infiniti.
Ciò non deve essere letto nel senso di un'introduzione nei programmi di nuovi contenuti. Anzi, in questo modo non si farebbe altro che ripetere l'errore che da anni si sta facendo con l'insegnamento dell'Analisi, dove si presenta una teoria parecchio formalizzata a studenti non in grado di capire perché mancanti di una sufficiente esperienza e competenza nell'àmbito della trattazione degli insiemi infiniti: proprio quell'esperienza, insomma, che vorremmo acquisissero gli allievi già a partire dalla scuola di base. Un'esperienza, questa, da sviluppare attraverso una serie di attività, appositamente studiate, aventi lo scopo di avvicinare l'alunno alla delicata quanto affascinante problematica concernente l'infinito, aiutandolo così a formarsi immagini mentali non distorte.

Per quel che concerne l'analisi degli errori che gli studenti del nostro campione hanno commesso, come abbiamo avuto modo di rilevare nei paragrafi 8 e 9, *appiattimento* e *dipendenza* si sono rivelati i più importanti. Per noi queste due forme patologiche hanno un'origine comune: l'incondizionata applicazione agli insiemi infiniti di procedure proprie degli insiemi finiti. Questo atteggiamento è frutto di un'evidente misconcezione, generata da anni di applicazione di determinate procedure sempre e solo in àmbito finito, procedure che col tempo sono diventate veri e propri modelli universali. Passando poi in un àmbito diverso, quello degli insiemi infiniti e dei numeri transfiniti, lo studente accumula nuove nozioni (arriva persino a studiare i limiti, le derivate e gli integrali), ma non riesce a farle proprie, segnatamente in quei casi (purtroppo per lui importanti) nei quali le vecchie procedure non funzionano più.

Il fatto che i due Autori della presente ricerca operino in due Paesi diversi (Italia e Svizzera) e quindi in due realtà scolastiche diverse, ha reso possibile la messa a fuoco di un'altra problematica non meno interessante.
In Svizzera la scuola pubblica gode di una buona immagine di serietà e di credibilità. Ne è stata testimone la recente votazione popolare sul problema del sussidio statale alle scuole private: il 75% dei votanti ticinesi ha *negato* tali sussidi dando così un forte segnale di fiducia alla scuola pubblica. Questo fenomeno ha anche ripercussioni didattiche: gli alunni svizzeri (in buona misura anche gli adolescenti e gli studenti più maturi) sono più inclini a considerare corrette e importanti le nozioni che vengono loro insegnate a scuola. In altre parole, nelle scuole svizzere lo studente sembra più incline ad accettare che vi sia chi scelga per lui i contenuti, le modalità e l'entità dell'impegno, rispetto a quanto sembra avvenire in Italia presso la popolazione studentesca. Questo fatto ha ripercussioni tangibili sul modo di apprendere delle due popolazioni scolastiche e in ultima analisi sui risultati. L'adesione forte ad un modello istituzionale considerato di prestigio fa sì che gli studenti svizzeri accettino, talvolta in modo acritico, le tesi dei teoremi dimostrati a scuola, anche se talune si scontrano con le misconcezioni citate pocanzi. Gli italiani, invece, mostrano maggior propensione a confutare le affermazioni matematiche che non si accordano con le loro conoscenze, con il loro "buon senso", sia nei casi in cui tesi corrette sono correttamente dimostrate, sia in quelli in cui tesi scorrette sono scorrettamente "dimostrate". Secondo noi è questa la ragione principale che fa rispondere meglio gli italiani alle questioni nelle quali i sensi (e l'esperienza accumulata) possono ancora fungere da verifica della conoscenza, e fa rispondere meglio gli svizzeri dove non è più possibile tale verifica e occorre quindi avere fiducia nella teoria. A verifica di questa nostra interpretazione *sociologica* dei risultati, si veda soprattutto il paragrafo 8, ed in particolare i commenti alle risposte delle domande 1a, 1b, 2d, 3, 4a.

Infine non possiamo sottacere il problema della (relativa) inattendibilità dei test scritti. A tale proposito, gli esiti dei colloqui sono chiaramente indicativi. Messi alle strette, gli studenti cambiano opinione e modificano la propria risposta data nel test (si vedano le significative percentuali nel paragrafo 9.). Taluni passano da una risposta corretta (data nel test, ma non fondata su un solido apprendimento, in certi casi basata addirittura su un errore: appiattimento o dipendenza) ad una errata, data con convinzione. Altri passano da una risposta errata ad un'altra errata. Alcuni, infine, passano da una risposta errata ad una corretta che sembra essere frutto di un apprendimento avvenuto proprio durante il corso dell'intervista.

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo, ma non ci credo...". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 465-494. [In versione inglese: «I see it but I don't believe it…». Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Belgio), XXXVI, 1, 1999, 93-120. Un ampio sunto del testo inglese appare in: Gagatsis A. (2000), *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education*, 7-9 january 2000, Nicosia, Cyprus, volume II, 371-383. Un altro ampio sunto del testo inglese appare in: *Proceedings of CERME1*, Osnabrück, 1998. In versione spagnola: «Lo veo, pero no lo creo». Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual, *Educación matemática*, Mexico DF, 11, 1, 5-24].

Cohen P.J. (1966). *Set theory and continuum hipothesys*. New York: W.A. Benjamin. Un'ottima traduzione italiana di G. Lolli, Milano: Feltrinelli, 1973.

D'Amore B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. *La matematica e la sua didattica*. 3, 322-335.

D'Amore B. (1997). Bibliografia *in progress* sul tema: "L'infinito in didattica della matematica". *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-305.

D'Amore B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (1999b). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. III ed. 2001.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2001). La "matematica del quotidiano". *La matematica e la sua didattica*. 3, 256-263.
Duval R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Actes de l'École d'été 1995.
Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.
Gagatsis A., Panaoura G. (2000). Rappesentazioni semiotiche e apprendimento. Un esempio: la retta aritmetica. *Bollettino dei docenti di matematica*. 41. 25-58.
Hart K. (ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics*. London: Murray. Ved. pagg. 11-16.
Schubauer Leoni M.L. (1988). L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: la situation de test revisitée. In: Perret Clermont A.N., Nicolet M. (eds.) (1988). *Interagir et connaître*. Cousset: Delval. 251-264.
Schubauer Leoni M.L. (1989). Problématisasion des notions d'obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. In: Bednarz N., Garnier C. (eds.) (1989). *Construction des savoirs: obstacles et conflits*. Ottawa: Agence d'Arc. 350-363.
Schubauer Leoni M. L., Ntamakiliro L. (1994). La construction de réponses à des problèmes impossibles. *Revue des sciences de l'éducation*. XX, 1. 87-113.
Shama G., Movshovitz Hadar N. (1994). Is Infinity a whole number? Atti del XVIII PME. Lisboa 1994. 265-272.
Stavy R., Berkovitz B. (1980). Cognitive conflict as a basic for teaching qualitative aspects of the concept of temperature. *Science Education*. 28, 305-313.
Tall D. (1980). The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematicas*. 11, 271-284.
Tsamir P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 167-207.
Waldegg G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 5, 19-36.

Ringraziamenti

Vogliamo ringraziare tutti coloro che ci hanno aiutato in questa ricerca e più esplicitamente:

in Italia
tutti gli insegnanti che ci hanno concesso le classi per i test e per le interviste:

- Grazia Grassi (I. T. I. "E. Majorana", San Lazzaro di Savena), Gianni Cupini e Maria F. Gaetani (L. S. "N. Copernico", Bologna), Paola Valzania e A. Benassi (I. T. I. "O. Belluzzi", Casalecchio), Carla Nannucci (I. T. I. "G. Marconi", Forlì)
- Martha Isabel Fandiño Pinilla per l'assistenza durante le interviste

in Svizzera
per le interviste:

- Aldo Frapolli (Liceo cantonale di Bellinzona), Carlo Ghielmetti (Liceo cantonale di Lugano 3)

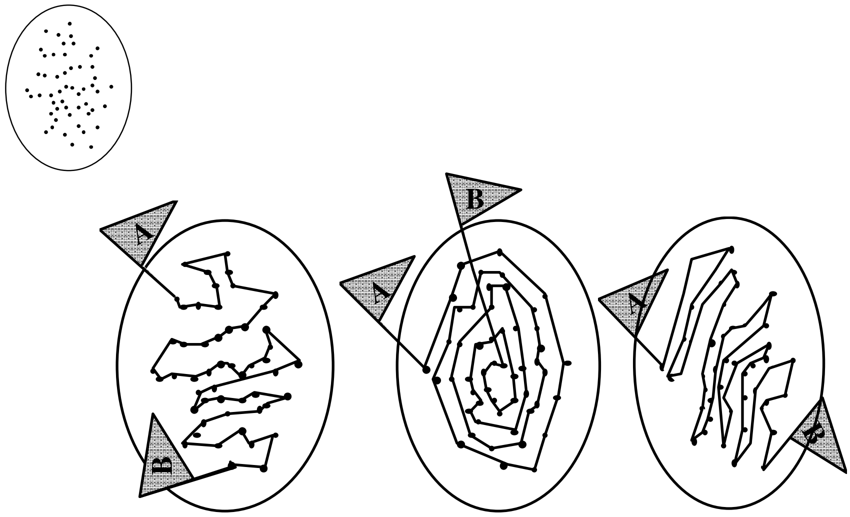
per i test:

- Claudio Beretta (Liceo cantonale di Locarno), Filippo Di Venti (Istituto cantonale di economia e commercio), Aldo Frapolli (Liceo cantonale di Bellinzona), Carlo Ghielmetti (Liceo cantonale di Lugano 3).

Ringraziamo anche i tre referee per l'eccellente lavoro critico che ci ha aiutato soprattutto nella valutazione dei risultati.

APPENDICE 1:
MATERIALE DI APPRENDIMENTO

1. Contare = Numerare



Quanti sono?

Contare gli elementi di un insieme significa assegnare ad ogni elemento un numero naturale progressivo, partendo da 1. Per poter contare con una certa garanzia di non commettere errori conviene tracciare una linea che parta da un elemento qualunque (bandierina A), che passi una e una sola volta per ciascun elemento da contare e che continui fin che non è passata per tutti i punti. Se n è il numero naturale assegnato all'ultimo elemento, si dice che gli elementi sono n, oppure che il loro insieme ha cardinalità n.

L'operazione del contare diventa più interessante quando concerne i termini di successioni numeriche. Per esempio, se volessimo contare gli elementi dell'insieme $I=\{x \in Z \mid -3 \leq x \leq +3\}$potremmo per esempio procedere in uno dei modi seguenti:

1	2	3	4	5	6	7
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
-3	**-2**	**-1**	**0**	**+1**	**+2**	**+3**

1	2	3	4	5	6	7
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
0	**–1**	**+1**	**–2**	**+2**	**–3**	**+3**

e concludere che **l'insieme I ha 7 elementi**. La figura mostra come alla base del contare sta una corrispondenza biunivoca tra gli elementi da contare e l'insieme $\{1 , 2 , 3 , \dots , n\}$.

Attenzione

- Non è necessario che la corrispondenza conservi l'usuale relazione d'ordine "≤": vi sono infatti parecchi percorsi possibili che permettono di numerare gli elementi di I.

- Di solito si comincia a contare da uno. Tuttavia, visto che a noi interessa soprattutto evidenziare la corrispondenza biunivoca tra l'insieme degli elementi da contare e un sottoinsieme di **N**, nulla ci vieta di cominciare a contare da zero. È quel che faremo d'ora in poi.

2. Contare gli elementi di insiemi infiniti

ESEMPIO 1: Quanti sono i numeri pari?

Osserviamo la figura che segue:

P	0	2	4	6	8	...	2 n	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
N	0	1	2	3	4	...	n	...

Essa ci mostra come sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme P dei numeri pari e l'insieme N dei numeri naturali. Ciò significa che **esistono tanti numeri pari quanti sono i numeri naturali**. Questo numero (infinito) si indica con la lettera $\aleph_0$ (si legge "alèf zero"). Se qualcuno pensasse che ciò sia impossibile, perché nell'insieme dei numeri pari mancano, rispetto a N, tutti i numeri dispari, deve ricredersi. La proprietà che già Euclide assunse come primitiva, secondo la quale "il tutto è maggiore di ogni sua parte" non vale per gli insiemi infiniti.

Attenzione

Si deve ricordare che per contare si preferisce usare anche il numero zero, per semplificare l'espressione della corrispondenza biunivoca.

Analogamente, si può mostrare che pure **l'insieme D dei numeri dispari ha cardinalità $\aleph_0$**:

D	1	3	5	7	9	...	2n+1	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
N	0	1	2	3	4	...	n	...

Curiosità

$N = P \cup D$, $P \cap D = \varnothing$, quindi $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
Ecco una delle stranezze che incontra chi accetta di giocare con l'infinito!

ESEMPIO 2: Quanti sono i multipli di 7?

M_7	0	7	14	21	28	...	7 n	...
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
N	0	1	2	3	4	...	n	...

La figura ci mostra come sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme M_7 multipli di 7 e l'insieme N. Possiamo affermare che **esistono tanti multipli di 7 quanti sono i numeri naturali**. In altri termini, abbiamo mostrato che anche l'insieme M_7 ha cardinalità $\aleph_0$.

ESEMPIO 3: Quante sono le potenze di 2?

Cerchiamole con il computer:

1	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10
11	12	13	14	15	**16**	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	**32**	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	**64**	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	**128**	129	130

A mano a mano che si procede in senso crescente, le potenze di 2 si fanno sempre più rare.
Saranno infinite?
L'insieme P_2 delle potenze di 2 avrà anch'esso cardinalità $\aleph_0$?

Non è difficile rispondere alle domande precedenti. Basta considerare la seguente figura:

P_2	$1=2^0$	$2=2^1$	$4=2^2$	$8=2^3$	$16=2^4$	...	2^n	...
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
N	0	1	2	3	4	...	n	...

Dunque, anche P_2 ha cardinalità $\aleph_0$.

ESEMPIO 4: Anche l'insieme **Z** dei numeri interi relativi ha cardinalità $\aleph_0$. Infatti…

N		0	1	2	3	4	5	…	2n	2n–1	…
							$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Z	...	–2	–1	0	+1	+2	+3	…	–n	+n	…

… oppure anche (ordinando **Z** in modo insolito):

N	0	1	2	3	4	5	…	2n	2n–1	…
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Z	0	–1	+1	-2	+2	-3	…	+n	-n	…

In entrambi i casi si è costruita una corrispondenza biunivoca tra **Z** e **N**: ciò significa che **vi sono tanti numeri interi quanti sono i naturali**. In altre parole, anche la cardinalità di **Z** è $\aleph_0$.

3. Contare i numeri razionali

Un numero si dice razionale se e solo se si può scrivere sotto forma di frazione a/b, con $b \neq 0$. Limitiamoci per ora ai numeri razionali strettamente positivi (detti anche assoluti).
Per essi vale $a,b \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Per poterli contare li disponiamo in questo modo:

numeratore

denominatore

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**...**
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	8/1		...
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	7/2	8/2		...
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	8/3		...
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	7/4	8/4		...
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	7/5	8/5		...
6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6	8/6		...
7	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7	8/7		...
8	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	8/8		...
9	1/9	2/9	3/9	4/9	5/9	6/9	7/9	8/9		...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Nella figura è indicato uno dei possibili percorsi che permettono di numerare tutte le frazioni. Nel nostro caso partiamo da 1/1 e seguiamo la linea visibile nella figura. Ogni volta che incontriamo una **frazione ridotta ai minimi termini** la numeriamo progressivamente. In questo modo a ogni numero razionale viene fatto corrispondere uno e un solo numero naturale. Abbiamo cioè "contato" i razionali assoluti e abbiamo così dimostrato che anch'essi sono $\aleph_0$.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{5}{1} & \cdots
\end{array}$$

Ovviamente ci sono altri modi di costruire percorsi nell'insieme delle frazioni. Eccone altri due, a mo' di esempio.

	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	8/1	...
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	7/2	8/2	...
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	8/3	...
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	7/4	8/4	...
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	7/5	8/5	...
6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6	8/6	...
7	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7	8/7	...
8	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	8/8	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Esempio di percorso possibile: si parte da 1/1 e si gira in senso antiorario nel primo quadrato, poi si passa alle successive cornici iniziando sempre in basso a sinistra e girando in senso antiorario: 1/1 , 1/2 , (2/2) , 2/1 , 1/3 , 2/3 , (3/3) , 3/2 , 3/1 , 1/4 , …

	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	7/1	8/1	...
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	7/2	8/2	...
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	7/3	8/3	...
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	7/4	8/4	...
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	7/5	8/5	...
6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6	8/6	...
7	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7	8/7	...
8	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	8/8	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Si ottiene la seguente corrispondenza:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{1}$	…

È quindi possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra Q^+ e N; possiamo allora dire che vi sono tanti numeri razionali assoluti quanti sono quelli naturali. Ancora, possiamo affermare che Q^+ ha cardinalità $\aleph_0$.
Si capisce poi che tra i razionali positivi e quelli negativi esiste una ovvia corrispondenza biunivoca: per esempio al razionale positivo 3/4 corrisponde quello negativo –3/4. Inoltre, nulla cambia se si include lo zero: allo zero naturale corrisponde lo zero razionale.
Dunque si possono numerare tutti i numeri dell'insieme Q.
Concludiamo affermando che anche Q ha cardinalità $\aleph_0$.
A maggior ragione, si potranno numerare i numeri razionali inclusi nell'intervallo]0,1[.
Concludiamo affermando che anche l'insieme dei numeri razionali compresi nell'intervallo]0,1[ha cardinalità $\aleph_0$.

Curiosità
Abbiamo appena trovato che:
$\aleph_0 + \aleph_0 + 1 = \aleph_0$

Ci sorge spontanea la domanda: ma allora, tutti gli insiemi numerici infiniti hanno la cardinalità di N, cioè $\aleph_0$?

4. Contare i numeri reali

Premessa: Il gioco delle parole-chiave.

Per entrare in un sito esclusivo di Internet occorre possedere una password che si compone di 5 cifre binarie. I soci attualmente sono 5 e ciascuno di essi ha una delle seguenti password:

0 1 0 1 1
1 0 0 1 1
1 0 1 0 1
0 1 0 0 1
0 0 0 1 0

Arriva un nuovo socio: come fare per dargli una password sicuramente diversa da quelle già assegnate? Il problema non è difficile da risolvere: siccome i soci e le password sono solo cinque, con un po' di pazienza, chiunque può trovare una nuova password. Ma se i soci fossero cento e ogni password si componesse di centro cifre binarie, come si potrebbe fare?
Un modo sicuro per risolvere questo interessante problema è il seguente (limitiamoci al caso dei cinque utenti):
al nuovo membro si assegna una password che abbia
- la prima cifra diversa dalla prima cifra del primo utente: 1
- la seconda cifra diversa dalla seconda cifra del secondo utente: 1
- la terza cifra diversa dalla terza cifra del terzo utente: 0
- la quarta cifra diversa dalla quarta cifra del quarto utente: 1
- la quinta cifra diversa dalla quinta cifra del quinto utente: 1

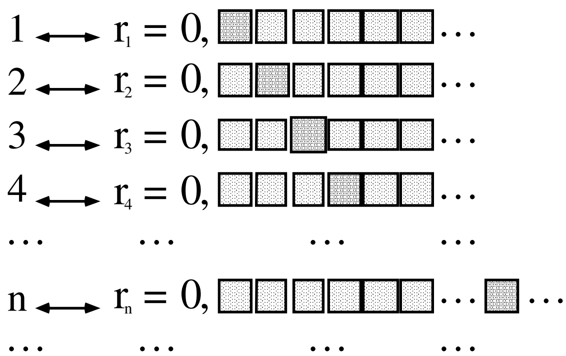
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 1$	$\neq 0$	$\neq 0$

1	1	0	1	1

Nuova password: 1 1 0 1 1.

Essa differisce dalla prima almeno per la prima cifra, dalla seconda almeno per la seconda cifra, dalla terza almeno per la terza cifra, dalla quarta almeno per la quarta cifra e dalla quinta almeno per la quinta cifra.

Alla domanda posta alla fine del punto precedente rispondiamo: non è vero che tutti gli insiemi numerici hanno la cardinalità di **N**. E per sostenere questa importante affermazione mostriamo che l'insieme **R** dei numeri reali ha cardinalità **maggiore** di quella di N, che indicheremo con il simbolo $\aleph_1$ (alèf uno).
Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che l'ultima affermazione non sia vera. Ammettiamo quindi che tutti i numeri reali si possano numerare. A maggior ragione, dovrà essere possibile numerare i numeri reali compresi nell'intervallo]0,1[. Li potremmo scrivere nella loro forma decimale così (escludiamo il periodo 9, tenendo presente che, per esempio, $0{,}3\overline{9} = 0{,}4$):



Ciascun quadratino rappresenta una cifra, cioè un elemento dell'insieme {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Se il numero è razionale con forma decimale finita, abbiamo tutti zeri da una certa cifra in poi; se il numero è razionale periodico, ci sarà un periodo di cifre che si ripete in continuazione; infine se il numero è irrazionale avrà una successione infinita di cifre disposte in modo da non formare periodi. Ora: se riuscissimo a trovare un numero reale r* (0 < r* < 1) diverso da tutti questi, avremmo dimostrato che non è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra **N** e **R**. Ma poiché tutti i razionali assoluti compresi tra 0 e 1 sono anche reali, avremmo dimostrato che la cardinalità dei reali (compresi tra 0 e 1) è maggiore di $\aleph_0$. Ricordando il gioco della parola-chiave, un numero r* si può trovare molto facilmente.
Basta che abbia:

- la prima cifra decimale diversa dalla prima cifra decimale di r_1
- la seconda cifra decimale diversa dalla seconda cifra decimale di r_2
- la terza cifra decimale diversa dalla terza cifra decimale di r_3

…

- l'n-esima cifra decimale diversa dall'n-esima cifra decimale di r_n

…

(Nella rappresentazione precedente, le cifre interessate sono nei quadratini più scuri.)

Otteniamo così il numero r*.

Constatiamo che:

r* differisce da r_1 almeno per la prima cifra decimale
r* differisce da r_2 almeno per la seconda cifra decimale
r* differisce da r_3 almeno per la terza cifra decimale
…
r* differisce da r_n almeno per l'n-esima cifra decimale
…

Dunque r* è diverso da tutti i numeri reali scritti in precedenza, che avevamo supposto in corrispondenza biunivoca con **N**. Se qualcuno pensasse di includere r* nell'elenco di prima e rinumerare il tutto, dovrebbe convenire che allora è di nuovo possibile trovare un altro numero reale r** , con lo stesso procedimento che abbiamo usato per determinare r*.

Ciò significa che non è assolutamente possibile trovare una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali dell'intervallo]0,1[e N, nel senso che, numerata una parte di questi, se ne trovano addirittura infiniti non appartenenti a questa parte.

Conclusione

A maggior ragione, siccome $1/a \in \left]0,1\right[\subset \mathbf{R}$ (a naturale $\neq 0$) è impossibile mettere in corrispondenza biunivoca gli insiemi **R** e **N,** quindi: card(**N**)< card(**R**).

Di solito card(**R**) si indica con $\aleph_1$. Quindi vale la disuguaglianza:

$\aleph_0 < \aleph_1$

APPENDICE 2:
QUESTIONARIO-TEST

1. Contare = Numerare

Si è usato il criterio secondo il quale per contare gli elementi di un insieme basta scegliere un percorso **qualsiasi che li tocchi tutti una sola volta** e poi numerarli progressivamente.

DOMANDE 1
(Metti una sola crocetta per ogni domanda e motiva eventualmente la tua risposta.)

1a) In che misura sei d'accordo con il criterio citato?

per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
☐	☐	☐	☐

perché…

1b) Sei proprio sicuro che scegliendo percorsi diversi (che tocchino una sola volta tutti gli elementi) si ottenga sempre lo stesso numero?

per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
☐	☐	☐	☐

perché…

2. Contare gli elementi di insiemi infiniti

Per contare gli elementi di insiemi infiniti si è partiti da zero e non da uno. Si è trovato che esistono tanti numeri pari quanti numeri naturali, altrettanti numeri dispari; si è visto che vi sono tanti multipli di 7 quanti sono i numeri naturali, altrettante potenze di 2 e altrettanti numeri interi relativi.

DOMANDE 2
(Metti una sola crocetta per ogni domanda e motiva eventualmente la tua risposta.)

2a) In che misura sei d'accordo che quando si contano gli elementi di insiemi infiniti si possa indifferentemente partire da zero o da uno?

per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
☐	☐	☐	☐

perché…

2b) Vi sono tanti multipli di 997 quanti sono i numeri naturali: in che misura sei convinto della verità di questa affermazione?

per nulla	mica tanto	abbastanza	del tutto
☐	☐	☐	☐

perché…

2c) Secondo te vi sono più numeri naturali o più numeri naturali quadrati ?

esistono più numeri naturali	esistono più naturali quadrati	ve ne sono lo stesso numero	non si può dire
☐	☐	☐	☐

perché…

2d) In una discussione qualcuno sostiene che i numeri interi relativi (positivi e negativi) sono addirittura il doppio dei numeri naturali. Che cosa ne pensi?

che costui non ha capito nulla	che costui ha ragione	che costui potrebbe anche aver ragione
☐	☐	☐

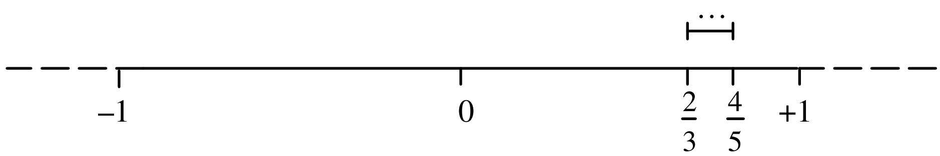
perché…

3. Contare i numeri razionali

Si è dimostrato che vi sono tanti numeri razionali (numeri del tipo a/b con a,b interi, b≠0) quanti sono i numeri naturali.

DOMANDA 3
(Metti una sola crocetta per ogni domanda e motiva eventualmente la tua risposta.)

3) Se rappresenti i numeri razionali su di una retta orientata (prefissato un punto zero e scelta un'unità di lunghezza) noti che fra due di essi -anche molto vicini- ve ne è sempre almeno uno; anzi addirittura infiniti.



Fatta questa osservazione, ci credi ancora che vi siano tanti razionali quanti naturali?

- se sì:

perché lo ha detto l'insegnante giustificandolo con una dimostrazione che però non mi ha convinto	perché sono tutti e due infiniti	perché è contraria al buon senso	perché abbiamo visto una dimostrazione chiarissima e convincente
☐	☐	☐	☐

- se no:

perché nella dimostrazione c'è qualcosa che non mi convince	perché l'insieme dei razionali è più grande di quello dei naturali
☐	☐

cioè…

4. Contare i numeri reali

Si è dimostrato che vi sono più numeri reali che numeri razionali.

DOMANDE 4
(Metti una sola crocetta per ogni domanda e motiva eventualmente la tua risposta.)

4a) Secondo te, vi sono più numeri reali tra 0 e 1 oppure più numeri razionali tra 0 e 1?

tra 0 e 1 vi sono più razionali	tra 0 e 1 vi sono più reali	i due insiemi hanno la stessa cardinalità	non si può dire
☐	☐	☐	☐

perché…

4b) Secondo te, vi sono più numeri reali tra 0 e 1 oppure più numeri razionali in tutto l'insieme Q?

più numeri reali tra 0 e 1	più numeri razionali in Q	i due insiemi hanno la stessa cardinalità	non si può dire
☐	☐	☐	☐

perché…

4c) Secondo te, vi sono più numeri reali in R oppure più numeri razionali in Q?

più numeri reali in R	più numeri razionali in Q	i due insiemi hanno la stessa cardinalità	non si può dire
☐	☐	☐	☐

perché…

4d) Secondo te, vi sono più punti in un segmento lungo 2 cm o in una retta?

vi sono più punti nel segmento	vi sono più punti sulla retta	i due insiemi hanno la stessa cardinalità	non si può dire
☐	☐	☐	☐

perché…